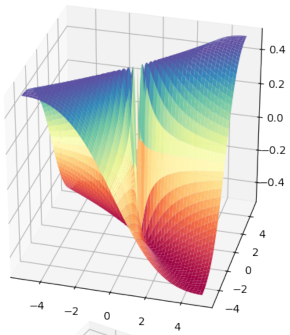
Calcul différentiel

Exercices traités en cours

1 Montrer que

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

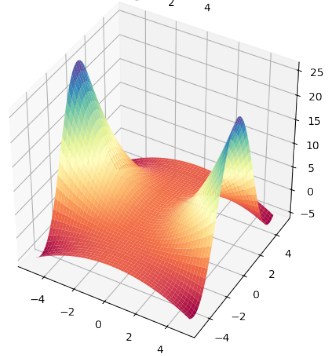
admet des applications partielles continue en 0, mais est discontinue en $(0,0)$.



2 Montrer que

$$f:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.



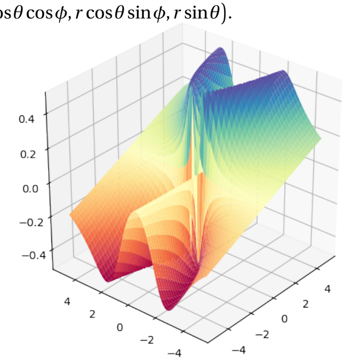
3 Calculer les dérivées partielles en tout point de $f:(r,\theta,\phi)\mapsto\big(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\big)$.

4 Calculer le dérivées partielles en tout point de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Les application partielles en $(0,0)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?



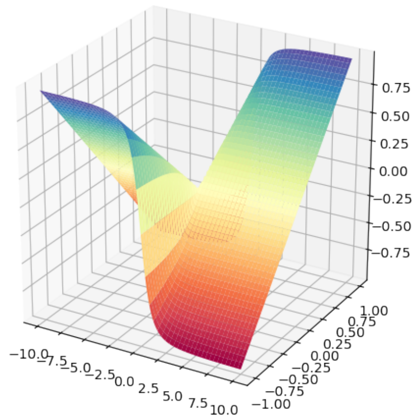
5

1. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires :
$$f:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
2. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques :
$$f:(r,\theta,z)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$
3. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques :
$$f:(r,\theta,\phi)\mapsto\big(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\big).$$

6 **CCINP 33**

On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

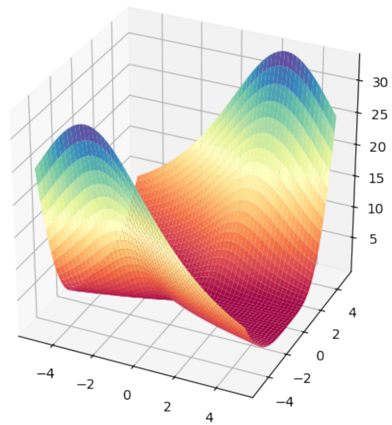
1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.



7 **CCINP 52**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

1. Prouver que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?



8 Calculer les dérivées partielles de $h:(x,y)\mapsto g(x+y,xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

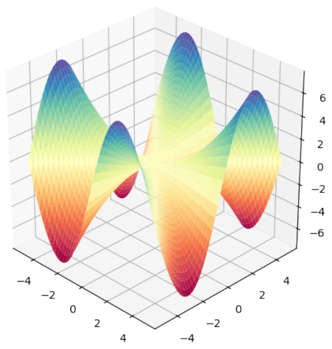
9 Calculer la dérivée de $g:t\mapsto f(tx_1,\ldots,tx_n)$ où $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

10 CCINP 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

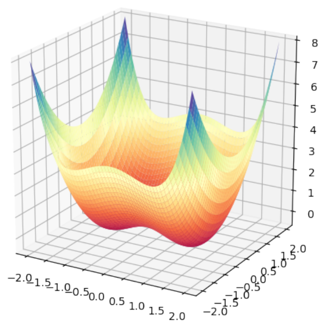
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.



11

Déterminer les extremums de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto y^2-x^2+\frac{x^4}{2}.$$



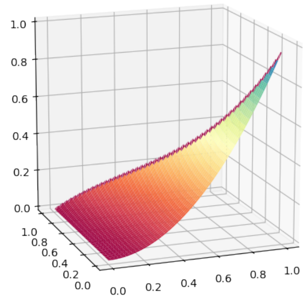
12

Soit

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^2+xy^2$$

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ x+y\leqslant 1\right\}$$

Montrer que f atteint un minimum et un maximum sur K et trouver tous les points en lesquels ils sont atteints.



13

Résoudre $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sur $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ à l'aide du changement de variable $(u,v)=\varphi(x,y)=(x+y,x+2y)$, en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

14

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Résoudre $a\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+b\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sur $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ à l'aide du changement de variable affine.

15

Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=0$$

sur $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

16

Soit $\mathscr{V}=]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi:V\to\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{V}$.

Résoudre

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

17

À l'aide du changement de variable $(u,v)=\left(x,\dfrac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2(\mathscr{U})$ où $\mathscr{U}=\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

18

Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{d}f(A)$.

19

Montrer que, si E est un espace euclidien $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \|x\|^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.

20

Montrer que, si E est un espace euclidien, $u\in\mathscr{L}(E)$, $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (x|u(x))\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.

Que se passe-t-il si, de plus, u est symétrique ?

Continuité

- Attention à ne pas tirer de conclusions trop hâtives quant à la continuité ou la limite d'une fonction de deux variables : celles des applications partielles ne suffit pas.
- Pour montrer que $f:E\mapsto F$ tend vers ℓ, on rappelle que la méthode standard consiste à majorer la norme de la différence par une quantité tendant vers 0. Le recours au changement de variable en coordonnées polaires est d'usage courant.
- Pour montrer qu'il n'y a pas de limite ou qu'elle ne vaut pas une valeur donnée, on peut penser au critère séquentiel.
- Pour la continuité, et en particulier les prolongements, on utilise souvent le lemme « de partition ».

21

Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes :

$$f:\ (x,y)\mapsto\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\qquad\qquad g:\ (x,y)\mapsto\frac{x^2+y^2}{x}$$

22

Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\qquad h:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^3y+x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x\neq y,\\ |x| & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$g:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

23 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles

- L'existence des dérivées partielles ne donne pas la continuité d'une fonction de deux variables, mais si elles sont en plus continues, cela donne le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction, et en particulier la continuité de celle-ci.

24 Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction ci-dessous. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

$$f : (x,y) \mapsto \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{array}\right.$$

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

26 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Déterminer les dérivées (partielles) de $g : (x,y) \mapsto f(y,x)$ et $h : x \mapsto f(x,x)$.

27 Soit $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \phi(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

28 **Fonctions harmoniques** Une application $f : \mathscr{U} \mapsto \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite ***harmonique*** si et seulement si $\Delta f = 0$ où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est le ***laplacien*** de f.

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soient $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ et $f(x,y) = \ln\left|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}\right|$. Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^3$ et harmonique, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Vérifier que $f : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

29 Calculer l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

Recherche d'extremums

- Pour déterminer les extremums locaux d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert, on cherche les points critiques et on les étudie un à un (par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, en cherchant le signe de $f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2)$ pour (h,k) tendant vers $(0,0)$).
  Si l'ensemble de définition n'est pas un ouvert, il y a des termes de bord, il faut les traiter à part.
  Si, de plus, on a affaire à une fonction continue sur un compact, on est assuré de l'existence d'extremums globaux.

30 Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $h(x,y) = x^3 + y^3$
4. $i(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $j(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

31 Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathscr{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a, b \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a)(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

32 Déterminer les triangles d'aire maximale inclus dans un cercle donné.

33 **CCINP** Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

34 **Principe du maximum** On désigne par D le carré ouvert $]0,a[\times]0,a[$.

1. Démontrer que si une fonction u, de classe C^2 sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$, admet un maximum relatif en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.
2. Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$, de classe C^2 sur D, nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u = 0$ sur D (fonction harmonique). On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive.
   Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction
   $$u_\epsilon : (x,y) \longmapsto u(x,y) + \epsilon(x^2 + y^2)$$
   ait un maximum relatif sur D.
   En déduire que u est nulle sur D.

Équations aux dérivées partielles

- Les changements de variables pour résoudre des Équations aux Dérivées Partielles sont fréquents : les calculs des dérivées partielles sont plus ou moins techniques, il faut être vigilant et bien connaître les formules de dérivation de fonctions composées, obtenus par règle de la chaîne ou à l'aide des matrices jacobiennes. Lorsqu'un changement de variable n'est pas indiqué, il faut penser à un changement de variable affine ou en coordonnées polaires.

35 Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ i.e. telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_*^+, \ \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

Montrer que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f$, puis étudier la réciproque.

36 Résoudre l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

37 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

38 Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

39 **CCINP** Toute fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, sous la forme $f(z) = u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, u et v désignant 2 fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose de trouver, s'il en existe, des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :

(C1) Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

(C2) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

1. Démontrer que, si u et v existent, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$.
2. On suppose que $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 3x$.
   (a) Trouver les fonctions v telles que les conditions (C1) et (C2) soient satisfaites.
   (b) Démontrer qu'il existe une fonction $f = u + \mathrm{i}v$ unique telle que $f(0) = 0$ et expliciter $f(z)$ en fonction de z.
   (c) Pour cette fonction f, construire dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point A d'affixe $f(\mathrm{i})$.

40 En utilisant le changement de variables $(u,v) = (x, x+y)$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

41 À l'aide du changement de variables $(u,v) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles : $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

42 Trouver toutes les applications $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que l'application $f : \mathscr{U} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit solution sur $\mathscr{U}$ de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{y}{x^3}$ puis résoudre l'équation sous forme général en posant $u = x+y$ et $v = x-y$.

Différentielle

- Pour déterminer la différentielle d'une application (différentiable), on peut passer par la définition en formant un développement limité à l'ordre 1 et en reconnaissant une partie linéaire et une partie négligeable, ou passer par les dérivées partielles.

43 Montrer que $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\intercal M$ est différentiable et calculer sa différentielle.

44 Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, que $f : M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle. *On pourra utiliser une somme géométrique.*

45 **Oral Mines** Dans un espace euclidien E, montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0_E\}$ et calculer sa différentielle.

[*On utilisera deux méthodes : calcul direct de la différentielle (retour à la définition), et calcul des dérivées partielles, relatives à une base qu'on a évidemment intérêt à choisir orthonormale*]

46 **Différentielle du déterminant** La classe $\mathscr{C}^1$ de l'application $\det : M \longmapsto \det(M)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de M. Mais le calcul de sa différentielle est plein d'intérêt.

Dans la suite, on notera $\dfrac{\partial}{\partial x_{i,j}}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1re méthode

1. Exprimer, pour toute matrice A, la dérivée partielle $\dfrac{\partial(\det)}{\partial x_{i,j}}(A)$ à l'aide d'un coefficient de la comatrice $\operatorname{Com} A$ de A.
   ⚠ *Il s'agit d'une question facile !*
2. En déduire l'expression, si $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de $\big(\mathrm{d}(\det)(A)\big)(H)$
   (On utilisera encore la comatrice, et on fera par exemple intervenir la trace).

Applications

1. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le gradient du déterminant en A, c'est-à-dire l'unique matrice $\phi(A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \big(\mathrm{d}(\det)(A)\big)(H) = \big(\phi(A) \mid H\big).$$
2. *(Souvenirs d'algèbre linéaire…)* Trouver une condition nécessaire et suffisant sur A pour que $\mathrm{d}(\det)(A) = 0$ (on désigne ici par simplement par 0 l'application $H \to 0$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

2re méthode

1. Démontrer, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp M) = \exp\big(\operatorname{Tr}(M)\big)$
2. On note, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(M) = I_n + M + \alpha(M)$. Montrer que $\alpha(M) = \underset{M\to(0)}{\mathrm{o}}(M)$ *(On pourra si on le souhaite utiliser une norme d'algèbre unitaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. sous-multiplicative et telle que $\|I_n\| = 1$).*
3. Utiliser les deux questions précédentes pour retrouver la différentielle en I_n de det (dont l'existence est, rappelle-t-on, acquise).
4. En déduire la différentielle en n'importe quelle $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ de f.
5. Démontrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Donner la différentielle de f en $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.