

## Révisions de MPSI

**6** EDL<sub>1</sub> Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur  $\mathbb{R}$

1.  $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$
2.  $y' + y = te^t + \sin t$
3.  $y' - \ln(x)y = x^x$
4.  $t^2 y' + 2ty = \frac{1}{1+t^2}$
5.  $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
6.  $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
7.  $ty' - y = \sqrt{|t|}$
8.  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
9.  $(1+t)^2 y'' + (1+t)y' = 2$
10.  $(x^2+1)y' + xy = 1$
11.  $(t^2+1)^2 y' + 2t(t^2+1)y = 1$
12.  $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$

**Solution de 6 : EDL<sub>1</sub>**

1. Sur  $\mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Sur  $\mathbb{R} : t \mapsto \frac{2t-1}{4}e^t + \frac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}$
3. Sur  $\mathbb{R}_*^+ : x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x}$
4. Sur  $I_1 = \mathbb{R}_*^+$  ou  $I_2 = \mathbb{R}_*^+$ ,  $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t + \lambda_k}{t^2}$   
Pas de solution sur  $\mathbb{R}$ .
5. Sur  $I_k = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $t \mapsto (\sin t + \lambda_k) \cos t$  avec  $\lambda_k \in \mathbb{K}$ .  
Solutions sur  $\mathbb{R} : t \mapsto (\sin t + \lambda) \cos t$ .
6. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (\lambda + e^x)e^{-x^2}$
7. Sur  $I_1 = \mathbb{R}_*^+$  ou  $I_2 = \mathbb{R}_*^+$ ,  $t \mapsto \lambda_k t - 2\sqrt{|t|}$   
Pas de solution sur  $\mathbb{R}$ .
8. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (x^2 + \lambda)e^{-x^2}$
9. Sur  $I_1 = ]-\infty, -1[$  et  $I_2 = ]1, +\infty[$ ,  $t \mapsto \ln^2(1+t) + \lambda_k + \mu_k \ln(1+t)$ .  
Aucune solution sur  $\mathbb{R}$ .
10. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ .
11. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t + \lambda}{t^2 + 1}$ .
12. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $1 + \operatorname{ch}^2 + \lambda \operatorname{ch}$ .

**7** EDL<sub>2</sub> Donner les solutions réelles ou complexes de

1.  $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8 \sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$
2.  $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
3.  $y'' + y = \sin^2(t)$
4.  $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch}(2x) \cos x$
5.  $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$

**Solution de 7 : EDL<sub>2</sub>**

1.  $t \mapsto -\frac{4}{5} \cos t - \frac{12}{5} \sin t - e^{t-\pi} + \frac{1}{5} e^{2(\pi-t)}$ .

2.  $x \mapsto \frac{x^2 + Ax + B}{4} e^x + \frac{e^{-x}}{8}$  avec  $A, B \in \mathbb{K}$ .

3.  $t \mapsto A \sin t + B \cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{6}$  avec  $A, B \in \mathbb{K}$ .

Ou, dans  $\mathbb{C}$ ,  $t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2t$  avec  $A, B \in \mathbb{C}$ .

4.  $x \mapsto \left( A \cos x + \frac{x+B}{4} \sin x \right) e^{-2x} + \frac{2 \cos x + \sin x}{80} e^{2x}$  avec  $A, B \in \mathbb{K}$ .

5.  $t \mapsto (A \cos t + B \sin t) e^{-t} + t - 1 + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t$  avec  $A, B \in \mathbb{K}$ .

**8** Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$ .

(On pourra remarquer qu'alors  $f$  est deux fois dérivable...)

**Solution de 8 :**

$$x \mapsto A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{2x-1}{4} = \lambda \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2x-1}{4}.$$

**9** En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications  $f$  deux fois dérivables telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos x$ .

**Solution de 9 :**

$$x \mapsto A \operatorname{sh} x + B \operatorname{ch} x - x + \frac{\cos x + x \sin x}{2}.$$