

Révisions de MPSI

6 EDL₁ Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur \mathbb{R}

1. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$
2. $y' + y = te^t + \sin t$
3. $y' - \ln(x)y = x^x$
4. $t^2y' + 2ty = \frac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
6. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
7. $ty' - y = \sqrt{|t|}$
8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
9. $(1+t)^2y'' + (1+t)y' = 2$
10. $(x^2+1)y' + xy = 1$
11. $(t^2+1)^2y' + 2t(t^2+1)y = 1$
12. $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$

Solution de 6 : EDL₁

1. Sur $\mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Sur $\mathbb{R} : t \mapsto \frac{2t-1}{4}e^t + \frac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}$
3. Sur $\mathbb{R}_*^+ : x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x}$
4. Sur $I_1 = \mathbb{R}_*^+$ ou $I_2 = \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t + \lambda_k}{t^2}$
Pas de solution sur \mathbb{R} .
5. Sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k) \cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$.
Solutions sur $\mathbb{R} : t \mapsto (\sin t + \lambda) \cos t$.
6. Sur \mathbb{R} , $x \mapsto (\lambda + e^x)e^{-x^2}$
7. Sur $I_1 = \mathbb{R}_*^+$ ou $I_2 = \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto \lambda_k t - 2\sqrt{|t|}$
Pas de solution sur \mathbb{R} .
8. Sur \mathbb{R} , $x \mapsto (x^2 + \lambda)e^{-x^2}$
9. Sur $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$, $t \mapsto \ln^2(1+t) + \lambda_k + \mu_k \ln(1+t)$.
Aucune solution sur \mathbb{R} .
10. Sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \lambda}{\sqrt{1+x^2}}$.
11. Sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t + \lambda}{t^2 + 1}$.
12. Sur \mathbb{R} , $1 + \operatorname{ch}^2 + \lambda \operatorname{ch}$.

7 EDL₂ Donner les solutions réelles ou complexes de

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8 \sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$
2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
3. $y'' + y = \sin^2(t)$
4. $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch}(2x) \cos x$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$

Solution de 7 : EDL₂

1. $t \mapsto -\frac{4}{5} \cos t - \frac{12}{5} \sin t - e^{t-\pi} + \frac{1}{5} e^{2(\pi-t)}$.

2. $x \mapsto \frac{x^2 + Ax + B}{4} e^x + \frac{e^{-x}}{8}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

3. $t \mapsto A \sin t + B \cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{6}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

Ou, dans \mathbb{C} , $t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2t$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.

4. $x \mapsto \left(A \cos x + \frac{x+B}{4} \sin x \right) e^{-2x} + \frac{2 \cos x + \sin x}{80} e^{2x}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

5. $t \mapsto (A \cos t + B \sin t) e^{-t} + t - 1 + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

8 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.

(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

Solution de 8 :

$$x \mapsto A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{2x-1}{4} = \lambda \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2x-1}{4}.$$

9 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Solution de 9 :

$$x \mapsto A \operatorname{sh} x + B \operatorname{ch} x - x + \frac{\cos x + x \sin x}{2}.$$