Variables aléatoires

Exercices vus en cours

1 **CCINP 109 - 104**

2 On lance deux dés équilibrés, et on appelle X est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X, Y).

3 Soient X_1, X_2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}(2)$ sur $\{-1, 1\}$ et $X_3 = X_1 \times X_2$.
Montrer que X_1, X_2, X_3 sont deux à deux indépendantes, mais ne le sont pas mutuellement.

4 **CCINP 98**

5 Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, montrer que $Y = n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$.

6 **CCINP 95 - 102 - 106 - 111 - 103 - 108 - 97 - 99 - 100 - 96 - 110**

Autres exercices

7 Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z, T suivent toutes une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. (a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   (b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   (c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

8 **Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock**

Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente étant supposé suivre une loi de Poisson[1] de paramètre λ.

Un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).

Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.

On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.

On modélise la situation de la manière suivante : on se donne une variable aléatoire N, représentant le nombre de clients entrant dans le magasin durant la journée, et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^e client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.

On suppose que la loi de N est la **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Le nombre total d'articles demandés en une journée est la variable aléatoire T définie par

$$T = \mathbb{1}_{(N\geqslant 1)}\sum_{j=1}^{N} X_j.$$

On demande la loi de T et la probabilité $\mathbb{P}(T \leqslant s)$.

1. Cohérent avec l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue en cours.

9 **...suite** Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente étant supposé suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Les probabilités respectives pour chaque client d'acheter zéro, un ou deux articles A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Le nombre d'articles en question achetés pendant une journée est une variable aléatoire S. On étudie la loi de S grâce à son fonction génératrice.

On modélise la situation de la manière suivante : on se donne une variable aléatoire N, représentant le nombre de clients entrant dans le magasin durant la journée, et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la loi de N est la **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ et X_n représente le nombre d'achats d'article A du n^e client de loi $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$.

On définit enfin $T = \mathbb{1}_{(N\geqslant 1)}\sum_{j=1}^{N} X_j$.

1. Calculer la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T, en tout $t \in [-1, 1]$.
2. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T = 3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
3. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

10 **Loi binomiale négative**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0 < n < k$, $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.

   On pourra par exemple introduire $P(x) = \sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_k le numéro du k-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T (loi binomiale négative). Combien vaut l'espérance de T ?

   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi binomiale négative », donne le temps d'attente de la k^e occurrence de cet événement.

11 Embranchement routier

On se place à un embranchement routier. Le nombre de véhicules arrivant pendant un intervalle de temps d'une heure est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Les véhicules ne peuvent prendre que l'une des directions A ou B, et la variable aléatoire Y représente le nombre de véhicules empruntant la direction A pendant cet intervalle de temps.

Chaque véhicule prend la direction A avec la probabilité p et les choix sont faits de manière indépendante.

C'est pourquoi on suppose que si n véhicules arrivent à l'embranchement pendant une heure donnée, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Déterminer la loi de Y ainsi que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnelle à l'événement $(Y = k)$ (du nombre de véhicules arrivés à l'embranchement sachant que k véhicules ont emprunté la direction A).

12 Un peu de théorie préhilbertienne

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dénombrable, tel que $\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) \neq 0$.

On notera $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui admettent un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{L}^2$ est un espace vectoriel, et que $(X|Y) = \mathbb{E}(XY)$ définit un produit scalaire sur cet espace.
2. Si $X \in \mathcal{L}^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.
3. À partir de la question précédente, retrouver la formule $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
4. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, X non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY + b\ ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.
5. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, on définit leur coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
   Montrer que $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ± 1 ?
6. Soit X, Y deux éléments de $\mathcal{L}^2$. On note $F = \left\{Z \in \mathcal{L}^2\ ;\ \exists (a_x)_{x\in X(\Omega)} \in \mathbb{R}^{X(\Omega)} \quad Z = \sum_{x\in X(\Omega)} a_x \mathbb{1}_{(X=x)}\right\}$.
   Déterminer, s'il existe, le projeté orthogonal de Y sur F (on suppose, pour tout x, $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$).

13 Le problème du collectionneur

Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i ($1 \leqslant i \leqslant n$) est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k - 1$ images ($2 \leqslant k \leqslant n$). On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathbb{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

14 L'espérance via une loi conditionnelle

1. On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x\in X(\Omega), \mathbb{P}(X=x)\neq 0} \mathbb{E}(Y|X = x)\mathbb{P}(X = x)$$
   où l'on désigne par $\mathbb{E}(Y|X = x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

2. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale**
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k).$$
3. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$. Dans l'urne j, il y a j boules blanches et $n - j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

15 Une autre expression de l'espérance

Soit U variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que U a une espérance finie si et seulement si la famille $(\mathbb{P}(U \geqslant j))_{j\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et qu'alors $\mathbb{E}(U) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U \geqslant j)$.

16 Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1 - p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPFPFFF\ldots \qquad FFFPFPPFPFPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1) \geqslant \mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1) \geqslant \mathbb{V}(L_2)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(L_2 = n|L_1 = m)$

17 Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0, 1]$.

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0, 1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1 - x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|Sn - nx| > n\alpha) \leqslant \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.
   (b) Soit la variable aléatoire $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$.
2. (a) Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a, b) \in [0, 1]^2$, $|a - b| \leqslant \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha$.
   (b) Justifier que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathbb{P}(S_n = k)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, puis conclure.