

Espaces préhilbertiens réels

Exercices vus en cours

- 1** Montrer qu'on définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire en posant $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt$, et en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.
- 2** Définir sur $\mathbb{R}_n[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$, un produit scalaire rendant la base canonique orthonormale.
- 3** Si I est un intervalle et $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable, montrer que $L^2(I)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et que $(f|g) = \int_I fg$ définit un produit scalaire sur $L^2(I)$.
- 4** Si $\ell^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles de carré sommable (ie terme général de série – absolument – convergente) montrer qu'il s'agit d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, et que $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.
- 5** **CCINP 76** Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
- (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
 - Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Solution de 5 : CCINP 76

1. (a) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

Preuve :

Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$.

De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y|x + \lambda y)$.

Donc, par bilinéarité et symétrie de $(|)$, $P(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda (x|y) + \|x\|^2$.

On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $\|y\|^2 \neq 0$.

Premier cas : si $y = 0$

Alors $(x|y) = 0$ et $\|x\| \|y\| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Deuxième cas : $y \neq 0$

Alors $\|y\| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.

On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.

Or $\Delta = (x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2$ donc $(x|y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$.

Et donc, $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$.

(b) On reprend les notations de 1. .

Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| = \|x\|\|y\| \iff x$ et y sont colinéaires.

Supposons que $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$.

Premier cas : si $y = 0$

Alors x et y sont colinéaires.

Deuxième cas : si $y \neq 0$

Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0 .

C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.

Donc x et y sont colinéaires.

Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).

$|(x|y)| = |\alpha| \cdot |(y|y)| = |\alpha| \|y\|^2$ et $\|x\|\|y\| = \sqrt{(x|x)}\|y\| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}\|y\| = |\alpha| \cdot \|y\|^2$.

Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

$$\text{On pose } A = \left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}.$$

$A \subset \mathbb{R}$.

$A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \mapsto 1$ de E).

De plus, $\forall f \in E, \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2$.

$$\text{D'une part, } \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = \left(\int_a^b 1 dt \right)^2 = (b-a)^2.$$

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(|)$ on obtient :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt.$$

$$\text{On en déduit que } \forall f \in E, \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2.$$

Donc $m \geq (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \mapsto 1$ de E , alors $\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

6

CCINP 79 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \Rightarrow h = 0$.

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 6 : CCINP 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que $\int_a^b h(x)dx = 0$.

On pose $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x h(t)dt$.

h est continue sur $[a, b]$ donc F est dérivable sur $[a, b]$.

De plus, $\forall x \in [a, b], F'(x) = h(x)$.

Or h est positive sur $[a, b]$ donc F est croissante sur $[a, b]$. (*)

Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

D'après (*) et (**), F est constante sur $[a, b]$.

Donc $\forall x \in [a, b], F'(x) = 0$.

C'est-à-dire, $\forall x \in [a, b], h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur \mathbb{R} , $(|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E$. $(f|f) = \int_a^b f^2(x)dx$.

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive sur $[a, b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geq 0$.

Donc $(|)$ est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

Alors $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a, b]$.

Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a, b]$.

Donc $(|)$ est définie. (***)

D'après (*), (**), et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E .

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx \leq \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{\sqrt{1 - e^{-2}}}{2}$.

7 Orthonormaliser la base $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$ de \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique.

Solution de 7 :

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0, 1, 1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|e_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$.

Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de \mathbb{R}^3 . Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\epsilon'_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\epsilon'_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\epsilon'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

8 Dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$ en utilisant le théorème de Weierstraß.
2. En déduire que $F \subsetneq (F^\perp)^\perp = E$.
3. Soit $G = \{t \mapsto P(t) \sin(t) ; P \in F\}$. Montrer que $G^\perp = \{0\}$ et en déduire que $(F \cap G)^\perp \supsetneq F^\perp + G^\perp$.
4. Montrer que $d\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Que vaut $d(\exp, F)$? Est-elle atteinte ?
5. Montrer plus généralement que si $d(f, F)$ est atteinte pour un $g \in F$, alors $f - g \in F^\perp$. Pour quelles fonctions est-ce le cas ?

9 CCINP 39 On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

$$\text{On pose alors } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

- (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 .

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans \mathbb{R} .
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer F^\perp (au sens de $(|)$).
Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Solution de 9 : CCINP 39

1. (a) Soit $(x, y) \in (l^2)^2$ avec $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n y_n| \leq \frac{1}{2} (x_n^2 + y_n^2)$.
 Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs,
 $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

(b) La suite nulle appartient à l^2 .
 Soit $(x, y) \in (l^2)^2$ avec $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.

On a $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + \lambda y_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n. \quad (1)$$

Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.

Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.

Donc $z \in l^2$.

On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + \lambda y_n$.

Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$.

Donc φ est linéaire sur l^2 . (*)

$$\forall x = (x_n) \in l^2, |x_p|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2, \text{ donc } |x_p| \leq \|x\|.$$

$$\text{Donc } \forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2, |\varphi(x)| = |x_p| \leq \|x\| \quad (**)$$

D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2 .

3. Analyse :

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^\perp$.

Alors $\forall y \in F, (x|y) = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.

On en déduit que, $\forall p \in \mathbb{N}, x_p = 0$.

C'est-à-dire $x = 0$.

Synthèse :

la suite nulle appartient bien à F^\perp .

Conclusion : $F^\perp = \{0\}$.

Ainsi, $(F^\perp)^\perp = l^2$.

On constate alors que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

10 CCINP 77 Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution de 10 : CCINP 77

1. On a $A \subset (A^\perp)^\perp$. (*)
En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^\perp, (x | y) = 0$.
C'est-à-dire, $\forall x \in A, x \in (A^\perp)^\perp$.
Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^\perp$ donc $\dim A = n - \dim A^\perp$.
De même, $E = A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp$ donc $\dim (A^\perp)^\perp = n - \dim A^\perp$.
Donc $\dim (A^\perp)^\perp = \dim A$. (**)
D'après (*) et (**), $(A^\perp)^\perp = A$.
2. (a) Procédons par double inclusion.
Prouvons que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $y \in F + G$.
Alors $\exists (f, g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.
$$(x | y) = \underbrace{(x | f)}_{=0} + \underbrace{(x | g)}_{=0} = 0.$$

car $f \in F$ et $x \in F^\perp$
car $g \in G$ et $x \in G^\perp$

Donc $\forall y \in (F + G), (x | y) = 0$.
Donc $x \in (F + G)^\perp$.
Prouvons que $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $x \in (F + G)^\perp$.
 $\forall y \in F$, on a $(x | y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.
Donc $x \in F^\perp$.
De même, $\forall z \in G$, on a $(x | z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.
Donc $x \in G^\perp$.
On en déduit que $x \in F^\perp \cap G^\perp$.
Finalement, par double inclusion, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
(b) D'après 2.(a), appliquée à F^\perp et à G^\perp , on a $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$.
Donc, d'après 1., $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$.
Donc $((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp$.
C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

11 $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

12 CCINP 92 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et tA désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
Déterminer F^\perp .

Solution de 12 : CCINP 92

1. \langle , \rangle est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E .
De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
 $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \text{tr}({}^tBA) = \langle B, A \rangle$.
Donc \langle , \rangle est symétrique.
On en déduit que \langle , \rangle est bilinéaire et symétrique. (1)
Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$.

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 \text{ donc } \langle A, A \rangle \geq 0.$$

Donc \langle , \rangle est positive. (2)

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$ telle que $\langle A, A \rangle = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{k,i}^2 \geq 0$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$.

Donc \langle , \rangle est définie. (3)

D'après (1),(2) et (3), \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .

Remarque importante : Soit $(A, B) \in E^2$.

On pose $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$\text{Alors } \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n ({}^tAB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i} B_{k,i}.$$

Donc \langle , \rangle est le produit scalaire canonique sur E .

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.

alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.

Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)

Soit $M \in E$.

$$\text{Posons } S = \frac{M + {}^tM}{2} \text{ et } A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

On a $M = S + A$.

$${}^tS = {}^t\left(\frac{M + {}^tM}{2}\right) = \frac{1}{2} ({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2} ({}^tM + M) = S, \text{ donc } S \in S_n(\mathbb{R}).$$

$${}^tA = {}^t\left(\frac{M - {}^tM}{2}\right) = \frac{1}{2} ({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2} ({}^tM - M) = -A, \text{ donc } A \in A_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)

D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Prouvons que $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), \langle S, A \rangle = 0$.

Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.

$$\langle S, A \rangle = \text{tr}({}^tSA) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(-{}^tAS) = -\text{tr}({}^tAS) = -\langle A, S \rangle = -\langle S, A \rangle.$$

Donc $2\langle S, A \rangle = 0$ soit $\langle S, A \rangle = 0$.

On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$. (2)

D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{i,j} = (e_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} \text{ avec } e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $F = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$.

Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,

$$M \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle M, E_{i,i} \rangle = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = 0.$$

Donc $F^\perp = \text{Vect}(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ et } i \neq j)$.

En d'autres termes, F^\perp est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

13 CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Solution de 13 : CCINP 80

1. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur \mathbb{R} , $(|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

$$\text{Soit } f \in E. (f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)dt.$$

Or $t \mapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geq 0$.

Donc $(|)$ est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

$$\text{Alors } \int_0^{2\pi} f^2(t)dt = 0.$$

Or $t \mapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.

Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.

Or f est 2π -périodique donc $f = 0$.

Donc $(|)$ est définie. (***)

D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E .

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$.

$x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x) \in F$.

De plus, si on note h l'application $x \mapsto \frac{1}{2}$,

$(h|f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$ et $(h|g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \text{Vect}(f, g)$).

On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x)$.

14

Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à p ?

Solution de 14 :

Vecteur normal à P : $(1, 0, -1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P((x, y, z)) = (x, y, z) - \frac{(1, 0, -1) \cdot (x, y, z)}{2} (1, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z) \right)$$

Donc $p_P(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, $p_P(e_2) = e_2$ et $p_P(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15

CCINP 81 On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}({}^tAA')$, où

$\text{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice tA par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
4. Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Solution de 15 : CCINP 81

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \text{Vect}(l_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut donc affirmer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{F} = \text{Vect}(l_2, K)$ donc (l_2, K) est une famille génératrice de \mathcal{F} .

De plus, l_2 et K sont non colinéaires donc la famille (l_2, K) est libre.

On en déduit que (l_2, K) est une base de \mathcal{F} .

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Comme (l_2, K) est une base de \mathcal{F} ,

$M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, l_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.

C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.

Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.

On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A, B) est une famille libre et génératrice de \mathcal{F}^\perp donc (A, B) est une base de \mathcal{F}^\perp .

3. On peut écrire $J = l_2 + B$ avec $l_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Donc le projeté orthogonal de J sur \mathcal{F}^\perp est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à \mathcal{F} .

D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\|$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur \mathcal{F} .

On peut écrire à nouveau que $J = l_2 + B$ avec $l_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = l_2$.

On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|J - l_2\| = \|B\| = \sqrt{2}$.

16

CCINP 82 Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension

finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Solution de 16 : CCINP 82

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(A + A' | B) = \left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''$.

Donc $(A + A' | B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A | B) + (A' | B)$.

$(\alpha A | B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha (A | B)$.

On en déduit que $(\cdot | \cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

De plus, par commutativité du produit sur \mathbb{R} , $(\cdot | \cdot)$ est symétrique.

Donc $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

$(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$. Donc $(\cdot | \cdot)$ est positive. (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.

Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.

Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.

Donc $(\cdot | \cdot)$ est définie. (***)

D'après (*), (**), et (***), $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp$ car $\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0$.

On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$.

17

Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathcal{D} : 3x + 4y = 7$ et $\mathcal{D}' : 5x - 12y = -7$.

Produit scalaire

18

Le retour des polynômes de Tchebbychev

1. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes

réelles $\langle P, Q \rangle_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P(t)Q(t)dt$.

On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation, valable pour tout n entier naturel et tout réel θ , $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale ce produit scalaire.

2. Soit E l'espace $C([-1, 1], \mathbb{R})$. Montrer que, si $(f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)dt$ est bien défini. Montrer que l'on construit ainsi un produit scalaire sur E , et que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale.

19

Soient f et g des applications de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|y) = (x|g(y))$. Montrer que f et g sont linéaires.

Solution de 19 :

Par symétrie, il suffit de montrer par exemple que f est linéaire.

Soient $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x')$.

On calcule, pour $y \in E$,

$$\begin{aligned} (f(x + \lambda x') - f(x) - \lambda f(x'))|y) &= (f(x + \lambda x')|y) - (f(x)|y) - \lambda(f(x')|y) \\ &= (x + \lambda x'|g(y)) - (x|g(y)) - \lambda(x'|g(y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $f(x + \lambda x') - f(x) - \lambda f(x') \in E^\perp = \{0\}$.

20

Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des polynômes réelles :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t)dt$$

- Démontrer qu'il existe une unique suite orthogonale de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tels que pour tout n , P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n .
- Démontrer qu'il existe deux suites (λ_n) et (μ_n) de réels telles que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$
(Indication : décomposer XP_{n-1} dans la base des P_k).

Solution de 20 :

- L'existence vient de Schmidt.
Pour l'unicité, on prend deux suites (P_n) , (Q_n) convenant, et pour tout n , on décompose $P_n \in \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_n)$ et on obtient $P_n = Q_n$ par orthogonalité.
- XP_{n-1} de degré n et unitaire se décompose dans la base orthogonale (P_0, \dots, P_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ en $XP_{n-1} = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1} + P_n$, avec $\lambda_i = \frac{(P_i|XP_{n-1})}{\|P_i\|} = \frac{(XP_i|P_{n-1})}{\|P_i\|} = 0$ si $i < n - 2$ pour des raisons de degré.

21

Écrit Mines – CCINP On considère le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ sur $\mathbb{R}[X]$.

- Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
- Montrer qu'il existe une suite orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout n .
- Soit $n \geq 2$. On suppose que P_n possède k racines de multiplicité impaire dans $]0, 1[$, a_1, \dots, a_k , avec $k < n$.

(a) Vérifier que, si $Q = \prod_{i=1}^k (X - a_i)$, alors $(P_n|Q) = 0$

(b) En écrivant $(P_n|Q)$ sous forme intégrale, aboutir à une contradiction.

(c) Démontrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont toutes dans $]0, 1[$.

- On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n . Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on ait

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

Donner une expression de ces scalaires en fonction des intégrales sur $[0, 1]$ des L_k , où les L_k désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

5. On reprend les notations de la question précédente. En utilisant la division euclidienne par P_n , montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i).$$

Ce type de résultat est à la base des méthodes de Gauss pour les calculs approchés d'intégrales.

22

Décomposition QR et inégalité de Hadamard – oral Mines

- En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que $A = QR$.
(On interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).
- Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.
- Y-a-t-il unicité de la décomposition ?
- On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, (c_1, \dots, c_n) la famille de ses vecteurs colonnes, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^n , alors

$$|\det M| \leq \|c_1\| \dots \|c_n\|$$

- Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
- On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R , si q est l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à Q , exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k .
- Conclure
- Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

Solution de 22 : Décomposition QR et inégalité de Hadamard – oral Mines

- En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que

$$A = QR$$

(on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).

Si (c_1, \dots, c_n) est la famille des vecteurs colonnes de A , A est la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^n à la base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, \mathcal{B}_c est orthonormale). Soit \mathcal{B} une base orthonormale de \mathbb{R}^n obtenue à partir de \mathcal{C} par le procédé de Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :

$$P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Mais $P_{B_c}^B$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Schmidt garantit que, pour tout k ,

$$c_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

où l'on note $B = (e_1, \dots, e_n)$ (on a en effet, pour tout k ,

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(c_1, \dots, c_k) \quad)$$

et donc...ça marche.

2. Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.

On écrit le système équivalent $RX = Q^T B$, c'est un système triangulaire.

3. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?

Visiblement non, vu le (petit) choix dans l'algorithme de Schmidt. Mais allons plus loin : à quelle condition a-t-on

$$QR = Q'R'$$

où Q et Q' sont orthogonales, R et R' triangulaires supérieures inversibles ?

On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm 1, 0, \dots, 0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Ainsi de suite...Bref,

$$\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \{D_\epsilon ; \epsilon \in \{-1, 1\}^n\}$$

où, si $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, $D_\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q'R' \Leftrightarrow \exists \epsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R' = D_\epsilon R \text{ et } Q' = QD_\epsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR , au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

4. On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, (c_1, \dots, c_n) la famille de ses vecteurs colonnes, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^n , alors

$$|\det M| \leq \|c_1\| \dots \|c_n\|$$

(a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.

Le premier membre est nul, le second membre est positif.

- (b) On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R , si q est l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à Q , exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k

$$c_k = q(\gamma_k)$$

- (c) Conclure

Donc, pour tout k , $\|c_k\| = \|\gamma_k\|$. Or, pour tout k ,

$$\|\gamma_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k R_{i,k}^2} \geq |R_{k,k}|$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\prod_{k=1}^n |R_{k,k}| = |\det(R)| = |\det(M)|$$

- (d) Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

Oui. Si et seulement si la matrice R est diagonale, d'après ce qui précède. Et donc si et seulement si les colonnes de M forment une famille orthogonale.

- 23** Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} muni de son produit scalaire canonique. Soient \mathcal{P} et \mathcal{I} les parties de E contenant les fonctions paires et impaires respectivement. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$ et déterminer la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} .

- 24** Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 (\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Solution de 24 :

Cauchy-Schwarz.

- 25** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x_1, \dots, x_n des nombres réels. Montrer que

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Solution de 25 :

Cauchy-Schwarz.

Projection orthogonale

26 On se place dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit D la droite d'équation $x = -y = z$, s la symétrie orthogonale par rapport à D et p le projecteur orthogonal sur D .

1. Déterminer les matrices de s et p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y) = \langle x | p(y) \rangle \quad \text{et} \quad g(x, y) = \langle x | s(y) \rangle.$$

Démontrer que f et g sont des formes bilinéaires symétriques. Sont-elles définies positives ?

27 **Oral Mines** Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Distance à un sous-espace

28 Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 , on définit $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (dans la base canonique) et une base orthonormale de F^\perp .
2. Soit $e_1 = (1, 0, 0, 0)$. Calculer $d(e_1, F)$.

29 Calculer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$

Solution de 29 :

Dans ce genre d'exercice qui se pose à l'oral, l'important est d'identifier un problème de projection orthogonale. Comme dans l'exercice précédent. Ensuite, il faut trouver la réponse aux questions suivante : dans quel espace ? ici, assez clairement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour quel produit scalaire ? ici, le produit scalaire canonique, qui est donné par

$$(U|V) = \sum_{i,j} U_{i,j} V_{i,j} = \text{Tr}(U^T V)$$

Sur quel sous-espace ? sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Une bonne idée est de déterminer une base orthonormale de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire canonique. Une meilleure est de montrer que, pour ce produit scalaire canonique,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Alors le théorème de projection orthogonale dit que la borne inférieure recherchée est un minimum, atteint en un point unique :

$$M = P_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

et valant

$$\left\| \frac{1}{2}(A - A^T) \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (A_{i,j} - A_{j,i})^2$$

30 Pour tous réels a, b, c , on pose $I(a, b, c) = \int_{-1}^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (a, b, c) tel que $I(a, b, c)$ soit minimum et le déterminer.

31 **Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP** On désigne par \mathcal{C} une partie convexe non vide d'un espace euclidien E .

1. On suppose \mathcal{C} compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de \mathcal{C} , que l'on note $p(x)$, tel que

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| \quad (= d(x, \mathcal{C})).$$

Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.

2. On suppose seulement \mathcal{C} fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de \mathcal{C} ; démontrer que

$$(y = p(x)) \iff (\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leq 0)$$

(pour \implies , on pourra écrire que, si $z \in \mathcal{C}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $p(x) + t(z - p(x)) \in \mathcal{C}$).

4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :

$$\|p(x) - p(x')\|^2 \leq \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle$$

puis démontrer que p est continue.

Solution de 31 : Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP

1. **On suppose \mathcal{C} compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de \mathcal{C} , que l'on note $p(x)$, tel que :**

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| \quad (= d(x, \mathcal{C})).$$

Existence : Soit x fixé dans E . L'application $z \mapsto \|x - z\|$, continue sur le compact \mathcal{C} , à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes; en particulier, elle atteint un minimum en un point $y \in \mathcal{C}$.

Unicité : C'est nettement plus difficile, et il faut faire un dessin. Remarquons que l'existence ne suppose pas la norme euclidienne, on va en revanche en avoir besoin pour l'unicité.

Supposons que y_1 et y_2 soient deux éléments de \mathcal{C} tels que

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, \mathcal{C})$$

L'identité du parallélogramme donne alors :

$$2(\|y_1 - x\|^2 + \|y_2 - x\|^2) = \|y_1 + y_2 - 2x\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2$$

(ce n'est qu'un dessin clair et bien observé qui peut donner l'idée d'écrire cela!) Divisons par 4 :

$$d(x, \mathcal{C})^2 = \left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x \right\|^2 + \frac{1}{4} \|y_1 - y_2\|^2$$

Mais, par convexité, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in \mathcal{C}$, donc $\left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x \right\|^2 \geq d(x, \mathcal{C})^2$, ce qui entraîne nécessairement $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, donc $y_1 = y_2$.

On peut écrire différentes choses menant à cette unicité, voir des triangles isocèles et des triangles rectangles plutôt que des parallélogrammes, etc...

2. On suppose seulement \mathcal{C} fermée. Démontrer que le résultat est encore vrai.

Existence : On part de l'idée simple suivante : ce n'est pas parmi les points de \mathcal{C} « éloignés » de x que l'on trouvera y . On considère donc encore x fixé dans E . Soit $r > 0$ tel que

$$B'(x, r) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$$

(l'existence d'un tel r ne pose pas de problème : on peut prendre $r = d(x, y)$ où y est un élément quelconque de \mathcal{C}). Posons alors $\mathcal{C}' = B'(x, r) \cap \mathcal{C}$. Fermée (comme intersection de fermés) et bornée (car incluse dans une boule) dans E de dimension finie, \mathcal{C}' est compacte. Il existe donc $y_0 \in \mathcal{C}'$ tel que

$$\|x - y_0\| = d(x, \mathcal{C}')$$

Si $z \in \mathcal{C}$, de deux choses l'une :

- Soit $z \in \mathcal{C}'$, et alors $\|x - y_0\| \leq \|x - z\|$,
- Soit $z \in \mathcal{C}$, et alors $\|x - y_0\| \leq r < \|x - z\|$

On voit que $\|x - y_0\|$ minore $\{\|x - z\| ; z \in \mathcal{C}\}$. Mais $y_0 \in \mathcal{C}$, donc

$$\|x - y_0\| = d(x, \mathcal{C})$$

Unicité : La démonstration du 1 marche encore : on n'a utilisé que la convexité de \mathcal{C} .

Soit y un élément de \mathcal{C} ; démontrer que

$$(y = p(x)) \iff (\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leq 0)$$

- Supposons que $y \in \mathcal{C}$ vérifie

$$(\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leq 0)$$

Alors, pour tout $z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, y - z \rangle \\ &\geq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $y = p(x)$.

- Supposons $y = p(x)$; soit $z \in \mathcal{C}$; par convexité, on a

$$\forall t \in [0, 1] \quad (1 - t)y + tz \in \mathcal{C}$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|(1 - t)y + tz - x\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

ce qui s'écrit

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|(y - x) + t(z - y)\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

ou encore, en développant,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|y - x\|^2 + t^2\|z - y\|^2 + 2t\langle y - x, z - y \rangle \geq \|y - x\|^2$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1] \quad t^2 \|z - y\|^2 + 2t \langle y - x, z - y \rangle \geq 0$$

d'où, en multipliant par $1/t$ si $t > 0$,

$$\forall t \in]0, 1] \quad t \|z - y\|^2 + 2 \langle y - x, z - y \rangle \geq 0$$

et en prenant la limite quand $t \rightarrow 0$,

$$\langle y - x, z - y \rangle \geq 0$$

qui est bien ce qu'on voulait.

3. **En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :**

$$\|p(x) - p(x')\|^2 \leq \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle$$

puis démontrer que p est continue

Partons du second membre :

$$\begin{aligned} \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle &= \langle x - p(x), p(x) - p(x') \rangle + \langle p(x) - p(x'), p(x) - p(x') \rangle \\ &\quad + \langle p(x') - x', p(x) - p(x') \rangle \end{aligned}$$

La question précédente permet alors de conclure à l'inégalité voulue. Puis, par Cauchy-Schwarz, on obtient que p est 1-lipschitzienne donc continue.

32 Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

Si u_1, \dots, u_n sont n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on définit leur matrice de Gram, $G(u_1, \dots, u_n)$, comme la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en ligne i et colonne j est $\langle u_i, u_j \rangle$.

1. Démontrer que si la famille (u_1, \dots, u_n) est liée alors le déterminant de sa matrice de Gram est nul (on pourra commencer par supposer que u_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_i).
2. On suppose maintenant (u_1, \dots, u_n) libre, et on considère (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. On note :

$$A = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u_1, \dots, u_n).$$

- (a) Exprimer $G = G(u_1, \dots, u_n)$ à l'aide d'un produit faisant intervenir A et sa transposée.
 - (b) Montrer que le déterminant de G est strictement positif.
3. On suppose la famille (u_1, \dots, u_n) libre ; on désigne par F le s.e.v. engendré par (u_1, \dots, u_n) , et par x un vecteur de E . Démontrer :

$$[d(x, F)]^2 = \frac{\det(G(u_1, \dots, u_n, x))}{\det G(u_1, \dots, u_n)}$$

On pourra par exemple, dans le calcul de $\det(G(u_1, \dots, u_n, x))$ écrire $x = (x - z) + z$, z désignant le projeté orthogonal de x sur F .

Solution de 32 : Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

1. Supposons $u_n = \alpha_{n-1}u_{n-1} + \dots + \alpha_1u_1$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\langle u_i, u_n \rangle = \alpha_{n-1}\langle u_i, u_{n-1} \rangle + \dots + \alpha_1\langle u_i, u_1 \rangle$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix} = \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, u_{n-1} \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_{n-1} \rangle \end{pmatrix} + \dots + \alpha_1 \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle \end{pmatrix}$$

que l'on peut lire de la manière suivante :

$$c_n = \alpha_{n-1}c_{n-1} + \dots + \alpha_1c_1$$

où les c_k sont les colonnes de la matrice de Gram $G(u_1, \dots, u_n)$. Les colonnes étant liées, le déterminant est nul.

Dans le cas général, il n'est pas nécessaire que u_n soit combinaison linéaire des autres u_i . Mais si la famille (u_1, \dots, u_n) est liée, au moins un des u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_k . Et on conclut de la même manière, en montrant que la colonne c_i est alors combinaison linéaire des autres.

2. Rappelons que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$G_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

et, la base (e_1, \dots, e_n) étant orthonormale,

$$A_{i,j} = \langle e_i, u_j \rangle$$

Mais d'autre part (calcul du produit scalaire dans une base orthonormale) :

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \langle e_k, u_i \rangle \langle e_k, u_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} \\ &= ({}^t A A)_{i,j} \end{aligned}$$

et donc

$$G = A^T A$$

On en déduit

$$\det(G) = (\det A)^2 > 0$$

($A \in GL_n(\mathbb{R})$). En fait, on peut dire plus : G est symétrique définie positive.

3. La dernière colonne de $G(u_1, \dots, u_n, x)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle x, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u_1, x - z \rangle \\ \langle u_2, x - z \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x - z \rangle \\ \langle x, x - z \rangle \end{pmatrix}$$

où z est le projeté orthogonal de x sur $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Donc :

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle z, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \langle x - z, x - z \rangle \end{pmatrix}$$

Utilisons la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne. On obtient, notant $g(\dots) = \det(G(\dots))$:

$$g(u_1, \dots, u_n, x) = g(u_1, \dots, u_n, z) + \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle u_1, u_n \rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle u_n, u_n \rangle & 0 \\ \langle z, u_1 \rangle & \dots & \dots & \langle z, u_n \rangle & \|x - z\|^2 \end{vmatrix}$$

(on réutilise le fait que $\langle u_k, x \rangle = \langle u_k, z \rangle + \langle u_k, x - z \rangle = \langle u_k, z \rangle$). On développe alors par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant; tenant compte de la nullité de $g(u_1, \dots, u_n, z)$ (famille liée), on conclut :

$$g(u_1, \dots, u_n, x) = \|x - z\|^2 g(u_1, \dots, u_n)$$