Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet, divisé en trois parties, étudie essentiellement deux thèmes où la notion de « partie symétrique d'une matrice » intervient.

Une première partie du sujet est consacrée à certaines propriétés élémentaires reliant une matrice à sa partie symétrique.

La deuxième partie s'intéresse à la première application concrète de cette notion, à savoir l'obtention de conditions suffisantes et parfois nécessaires pour satisfaire une propriété d'orthogonalité d'une matrice par rapport à un sous-espace vectoriel H (propriété appelée la H-singularité).

La troisième partie étudie les matrices dont les valeurs propres ont chacune une partie réelle strictement positive. Ces matrices sont importantes car elles permettent de montrer la bornitude de certaines équations différentielles matricielles. Il s'avère que ces matrices peuvent être réalisées, par exemple, avec des matrices dont la partie symétrique est définie positive.

Analyse globale des résultats

Les statistiques ci-après portent sur les 4530 copies des candidats présents. Les parties I et II ont été traitées par la quasi-totalité des candidats (seuls moins de 100 candidats n'ont aucune réponse juste à la partie I).

En ce qui concerne la partie II, on voit une chute brutale du nombre de réponses pertinentes : 33% des candidats n'ont quasiment pas été convaincants sur la sous-partie II.C, quota qui tombe à 10% pour les sous-parties II.D et II.E. Étrangement, ce n'est pas tant la difficulté des sous-parties II.C, II.D et II.E qui sont en cause mais essentiellement des problèmes rédactionnels. En effet, ces parties contenaient beaucoup de répétitions avec la partie II.A et beaucoup de candidats n'ont pas fait l'effort d'expliquer les différences (par exemple en terme de tailles de matrices).

Bien que la partie III contienne des questions difficiles, le jury estime que les premières questions sont largement abordables. La toute première question de la partie III (question **III.A.1**) fut particulièrement mal comprise. Un peu plus de la moitié des candidats ont abordé cette troisième partie mais 20% n'ont quasiment aucune réponse juste.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury rappelle aux candidats que tous leurs calculs sont lus et il est donc illusoire de simuler une bonne réponse avec des calculs hasardeux qui aboutissent, par magie, à la réponse demandée.

Le jury souhaite préciser quelques recommandations sur l'usage de la calculatrice. Cette dernière est autorisée mais doit être utilisée de façon réfléchie. Si une question demande de vérifier un calcul avec une *valeur explicite* (par exemple **II.B.2**), alors le jury ne peut faire aucune distinction entre un candidat ayant réellement fait usage de la calculatrice et un candidat ayant seulement écrit « avoir fait usage de la calculatrice ». Les candidats doivent donc comprendre que l'usage de la calculatrice ne peut être valide dans ce contexte en vue d'une évaluation et par conséquent qu'une démonstration mathématique est attendue. À contrario, si une question nécessite un calcul *non donné dans l'énoncé* alors la démarche scientifique de l'usage de la calculatrice est parfaitement pertinente.

Concernant les calculs théoriques de déterminant, le jury conseille vivement aux candidats d'expliquer leur cheminement de pensée (développement par rapport à une ligne et précision de l'opération, reconnaissance d'un déterminant par blocs...). En effet, le jury ne peut raisonnablement pas valider une réponse sans comprendre l'argumentation des candidats. Cela est d'autant plus dommageable pour les candidats qui ont manifestement les capacités de justifier leur argumentation.

Partie I

I.A.1). Cette question a été globalement bien traitée. Concernant les dimensions des sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques, certaines copies contenaient des réponses comme $1/2$ ou $n/2$! Réponses étranges puisqu'une dimension est toujours un entier.

I.A.2) Globalement réussie par la moitié des candidats. Une erreur très grave a trop souvent été faite : l'oubli des carrés dans le théorème de Pythagore.

I.B.1) Plus de la moitié des candidats ont réussi cette question. Signalons une négligence faite par certains candidats : la considération de bases de réductions non nécessairement orthonormées.

I.B.2) Première question de réflexion du sujet. La question a été globalement mal traitée. Par exemple, certains candidats considèrent que toute matrice est diagonalisable. En outre, une erreur récurrente a interpellé le jury : il est vrai que le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) mais il est faux de ne considérer que les valeurs propres réelles !

I.B.3a) Après écriture de A_s sous la forme $P^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P$, beaucoup de candidats ont donné la forme de $B = P^\top \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})P$ sans mentionner la symétrie de B. L'unicité de B, qui est une question classique, n'a été réussie que par moins de 10% de candidats. Deux approches de réponses sont possibles :

1. remarquer que B commute avec A_s et étudier le comportement de A_s sur les sous-espaces propres de A_s ;
2. exprimer B comme un polynôme en A_s avec des polynômes d'interpolation de Lagrange.

Le jury tient à signaler avoir été agréablement surpris par une preuve très élémentaire d'un candidat évitant ces deux approches.

Si $B_1 = P_1^\top D_1 P_1$ et $B_2 = P_2^\top D_2 P_2$ sont deux racines carrées (convenablement diagonalisées), alors l'égalité $B_1^2 = B_2^2$ entraine $D_1^2 Q - Q D_2^2 = 0$ avec $Q = P_1 P_2^\top$. En termes de coefficients, cela donne

$$0 = [D_1^2 Q - Q D_2^2]_{i,j} = [D_1]_{i,i}^2 [Q]_{i,j} - [D_2]_{j,j}^2 [Q]_{i,j} = [Q]_{i,j}([D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j})([D_1]_{i,i} + [D_2]_{j,j})$$

Or on a $[D_1]_{i,i} > 0$ et $[D_2]_{j,j} > 0$. Ce qui fournit $[Q]_{i,j}([D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j}) = 0$, c'est-à-dire $[D_1 Q - Q D_2]_{i,j} = 0$ ou encore $D_1 Q - Q D_2 = 0$ et enfin $B_1 - B_2 = 0$.

Autrement dit, les endomorphismes matriciels $Q \mapsto D_1^2 Q - Q D_2^2$ et $Q \mapsto D_1 Q - Q D_2$ ont le même noyau dès lors que D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales à valeurs propres strictement positives !

I.B.3b) Moins de 10% des candidats ont bien traité cette question. La matrice candidate $Q = A_s^{-1} A_a$ ne pouvait être valide car n'est généralement pas antisymétrique.

I.B.3c) Il s'agit de la première question vraiment difficile. Environ une trentaine de candidats ont réussi cette question. Bien que des astuces techniques sont possibles pour résoudre cette question, un angle d'attaque plus prometteur est sans doute spectral : si Q est une matrice antisymétrique réelle, alors la matrice symétrique $Q^\top Q = -Q^2$ a ses valeurs propres positives et donc Q a toutes ses valeurs propres imaginaires pures. On conclut aisément que $\det(I + Q) \geqslant 1$.

I.B.4) Question facile et globalement réussie.

I.C.1) Environ 10% des candidats ont réussi cette question. Il faut savoir que la transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale.

I.C.2) Question facile pourvu que la description du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ soit connue. En effet, certains candidats oublient les matrices symétriques $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

I.C.3) Cette question nécessitait une certaine expérience de la réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Presque aucun candidat n'a vérifié qu'une matrice antisymétrique reste antisymétrique après changement de base orthonormée (de même avec la symétrie ou l'orthogonalité).

Partie II

II.A.1) Question bien traitée par environ deux tiers des candidats. La question nécessitait de savoir qu'un vecteur orthogonal à tous les autres est nécessairement nul (par exemple car orthogonal à lui-même).

II.A.2) Question globalement bien traitée.

II.A.3) Environ un tiers des candidats ont bien su écrire les implications en jeu. Hormis la manipulation des nouvelles définitions, la principale difficulté rencontrée fut l'oubli de considérer des vecteurs *non nuls* dans des noyaux de matrices.

II.A.4) Résolue par presque tous les candidats ayant abordé cette question.

II.A.5) Les candidats ont souvent oublié un argument pour justifier le calcul du déterminant.

II.A.6) Cette question nécessitait une astuce devenue implicite dans le sujet, à savoir que si B est une matrice antisymétrique alors $X^\top BX = 0$ pour tout vecteur colonne X.

II.A.7) Environ la moitié des candidats ont traité cette question. Parmi ces derniers, presque tous l'ont réussie. Le fait que la question utilisait la question I.B.4 présente sur la même page a sans doute beaucoup joué dans ce succès.

II.A.8) Beaucoup de candidats confondent « condition suffisante » et « condition nécessaire ». En effet, les questions précédentes avaient vocation à donner des conditions suffisantes pour obtenir une certaine conclusion (la H-singularité) or la question II.A.8, convenablement reformulée, étudiait une condition nécessaire (à savoir que A_s ne soit pas symétrique définie positive). Les résultats des questions précédentes sont donc inutiles et il fallait obtenir une preuve directe.

II.B.1) Question très facile qui ne fut bien réussie que par à peine plus de deux tiers des candidats.

II.B.2) Les réponses furent fort contrastées. Environ la moitié des candidats n'ont pas su répondre à cette question. Le jury n'a pas validé des réponses affirmant que la calculatrice confirmait les valeurs explicites de la question.

II.B.3) Environ un tiers des candidats ont tenté d'aborder cette question mais seulement 5% ont apporté une réponse convaincante. Il s'agissait d'une question de synthèse donc difficile par nature. On notera qu'une inversion de matrice peut être utile et dans ce cas que l'usage de la calculatrice est parfaitement acceptable.

II.C) Puisqu'il s'agit essentiellement d'une reprise des arguments des questions de la partie précédente, le jury attendait de modestes modifications nécessaires pour justifier les réponses.

II.C.5) Question difficile. Quasiment jamais abordée (moins de 20% de tentatives). Environ 80 candidats ont su convaincre le jury. L'idée était de chercher P' sous la forme BP avec une matrice carrée B (dépendant de A).

Fin de la partie II. De même que précédemment, ces questions n'ont quasiment pas été traitées.

Partie III

III.A.1) Le jury considère cette question comme facile. Environ 50% des candidats l'ont abordée mais seuls 5% ont su écrire correctement leurs arguments. Une première difficulté rencontrée par certains candidats eut été de ne pas remarquer que A est dimension 2. Ces candidats ont donc essayé de prouver le résultat en toute dimension. Plus grave, certains candidats ont très mal distingué valeurs propres réelles et valeurs propres complexes.

III.A.2a) Environ un tiers des candidats ont abordé cette question et 10% ont su être convaincants. Étant donné la question précédente, le piège à éviter fut d'invoquer la formule fausse $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. À contrario, affirmer que la formule précédente est fausse ne suffit pas !

III.A.2b) Abordée par environ 15% des candidats dont le tiers a donné des réponses satisfaisantes. L'erreur est d'affirmer trop rapidement que toute valeur propre de $A+B$ est de la forme $a+b$ avec a et b respectivement valeurs propres de A et B.

III.A.3) Il s'agit d'une question facile. Environ 20% de tentatives pour 5% de réussite. L'erreur fréquente fut d'oublier d'exploiter qu'un vecteur complexe est non nul si et seulement si sa partie réelle ou imaginaire n'est pas nulle.

III.A.4) Comme toute question d'exemple ou de contre-exemple, cette question demandait du temps pour peaufiner une réponse. Malgré son caractère général, il est raisonnable de se restreindre en petite dimension si bien que la question III.A.1 fournissait un parfait angle d'attaque. Environ 5% de tentatives pour 2% de réussite.

III.B.1) Parmi les candidats ayant abordé cette question, beaucoup ont du mal à résoudre une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Quant à la majoration attendue, la formule $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)}$ semble mal connue pour $z \in \mathbb{C}$.

III.B.2) Environ 10% de tentatives pour 3% de succès. Il s'agissait d'un argument par récurrence. Une bonne rédaction était attendue.

III.C.1) Seul un candidat a réussi cette question. Elle nécessitait une certaine habitude des opérateurs $M \mapsto AM + MB$ agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. L'idée étant que par trigonalisation (et la démarche n'est pas triviale !), on montre qu'une valeur propre de ces opérateurs est de la forme $a + b$ avec a et b respectivement valeur propre de A et B.

III.C.2,a,b) Seul un candidat a réussi ces questions. L'existence et l'unicité découlaient du fait qu'un endomorphisme positivement stable est forcément un automorphisme (car 0 n'est pas valeur propre). La symétrie était immédiate par unicité et en remarquant que $B^\top$ vérifie la même équation que B. Quant à l'inégalité $\det(B) > 0$, sa résolution demandait une grande mémoire ou du moins une excellente analyse du sujet puisqu'elle est conséquence immédiate de la question I.B.3c) traitée à priori plus de deux heures auparavant...

III.C.3.a,b,c) Ces questions ont pu être abordées par moins d'une centaine de candidats. Les réponses furent essentiellement satisfaisantes.

Conclusion

Le jury déplore le peu d'attention que certains candidats accordent à la qualité de leur rédaction. En effet, un nombre important de copies sont très peu lisibles (voir illisibles) tant sur la forme que sur le fond. Certaines réponses ne contenaient aucun mot (tout juste quelques équations et symboles $\Rightarrow$).

Le jury rappelle, comme souvent, que les candidats ayant les meilleurs notes ne sont pas forcément ceux qui ont abordé le plus de questions. Par exemple, certains candidats ont traité une très grande partie du sujet avec des réponses fausses ou insuffisantes. De même, certaines questions difficiles, par exemple I.B.3c ou III.C.2, furent hautement valorisées par le jury. Cela explique pourquoi certains candidats ont de bonnes notes en ayant fait une portion, à priori faible, du sujet ! Le jury souligne à ce propos la détermination remarquable manifestée par bon nombre de candidats.