Devoir en temps limité n° 9

PROBLÈME 1

Ce problème comporte 3 problèmes indépendants.

Notations et définitions

- **N** désigne l'ensemble des entiers naturels, **N*** désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- **R** désigne l'ensemble des nombres réels.
- **R**$[X]$ désigne le **R**-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in$ **N**, **R**$_n[X]$ le **R**-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équations lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carré.

Partie I – Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de **R**$[X]$ défini par $\forall\, P \in$ **R**$[X]$, $\Delta(P) = XP'$.
Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in$ **R**$[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur **R**$[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in$ **R**$_n[X]$, alors $\Delta(P) \in$ **R**$_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de **R**$_n[X]$ induit par Δ.

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de **R**$_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par $\forall\, P \in$ **R**$[X]$, $\Phi(P) = X^2P'' + aXP'$.
Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de **R**$[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de **R**$_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de **R**$[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbf{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de **R**$_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de **R**$_n[X]$.
On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0; n]\!]$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0; n]\!]$.

Q12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II – Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{2}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Q13. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q14. Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur **R** de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$

Q15. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (3) sur **R**. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

Q16. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

Q17. Montrer que si y est solution de (2) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

Q18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III – Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

Q20. Montrer que pour tout $k \in$ **N**, on a $\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}. \end{cases}$

Q21. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

Q22. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0}\alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0}\beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k x^k\right) = 1.$$

Q23. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0}\beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta_0 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k} & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k\in\mathbf{N}$: $|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}$.

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et que, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$ $|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geqslant 0}\beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y\colon x\longmapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si la fonction $x\colon\ \longmapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que $x\longmapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$ soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- **N** désigne l'ensemble des entiers naturels et **R** celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on note $S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$, $\mathbf{P}\left(|X| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(|X|\right)}{\alpha}$.

Q34. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par $\forall x\in\mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x$.
Montrer que la fonction g_a est dérivable sur **R** et que la fonction g_a' est décroissante sur **R**. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x\in[-1,1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q36. En déduire que $\forall t > 0,\ \forall x\in[-1,1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$.

Q37. En déduire que $\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t$.

Q38. Montrer que $\forall k\in\mathbf{N},\ \forall t\in\mathbf{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$.
En déduire que $\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n\in\mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction $\mathbf{R}\ni t\longmapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$.

Conclusion

Q41. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m\geqslant n}\left\{\omega\in\Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}$.
Montrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

Q43. Pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, posons $\Omega_k = \left\{\omega\in\Omega\ ;\ \exists n\in\mathbf{N}^*,\ \forall m\geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$.
Montrer que, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega\in\Omega;\ \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k\in\mathbf{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.