

Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 8

Exercice 1 : topologie de $GL_n(\mathbb{R})$

1. La suite $\left(\frac{1}{k}I_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices inversibles convergeant vers O_n qui ne l'est pas. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

2. $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert (complémentaire d'un fermé) par une application continue.

3. Comme $\text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}_*^+$ est fini (éventuellement vide), on a bien $\rho > 0$ tel que $]0, \rho[\subset \text{Sp}(M)$: il suffit de prendre la plus petite valeur propre > 0 si elle existe, et n'importe quel $\rho > 0$ sinon. Donc $\forall \lambda \in]0, \rho[, M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, à partir d'un certain rang, $M_k = M - \frac{1}{k}I_n$ est inversible et $M_k \rightarrow M$.

Donc, par caractérisation séquentielle, $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Si A est inversible, $BA = A^{-1}(AB)A$ et comme le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Donc $f : A \mapsto \chi_{AB} - \chi_{BA}$ est nulle sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, il s'agit d'une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par continuité de $A \mapsto AB$ et $A \mapsto BA$ qui sont linéaires en dimension finie, et de $A \mapsto \chi_A$ car χ_A est un polynôme dont les coefficients sont polynômiaux en A vu la définition du déterminant ($\chi_A = \det(XI_n - A)$).

Donc, par densité de la question précédente, f est nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Puis avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $AB = 0_2$ et $BA = B$ donc $\pi_{AB} = X \neq \pi_{BA}$ car $BA \neq 0_2$.

5. Comme \det est continue et $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs (on ne peut relier continûment un réel < 0 à un réel > 0 , ou bien ce n'est pas un intervalle),

$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 2 :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: « H_n est un polynôme unitaire de degré n . »

Initialisation On a bien H_0 unitaire et de degré 0

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit un polynôme unitaire de degré n .

On a $\deg(XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n > n - 1 \geq \deg(H'_n)$

donc $\deg(H_{n+1}) = \deg(XH_n - H'_n) = n + 1$ et le coefficient dominant de H_{n+1} est celui de XH_n , soit 1, d'où l'hérédité

Conclusion On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n .

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. soit $\mathcal{P}(n) : \langle H'_{n+1} = (n+1)H_n \rangle$

Initialisation On a $H_0 = 1$ et $H_1 = X$ donc on a bien $H'_{0+1} = (0+1)H_0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H'_{n+1} = (n+1)H_n$. On a

$$H'_{n+2} = (XH_{n+1} - H'_{n+1})' = XH'_{n+1} + H_{n+1} - H''_{n+1} = (n+1)XH_n + XH_n - H'_n - (n+1)H'_n$$

$$\text{donc } H'_{n+2} = (n+2)(XH_n - H'_n) = (n+2)H_{n+1}.$$

Conclusion On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.

3. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

a) Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$.

Par croissance comparée on a $x^2 P(x)Q(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $P(x)Q(x)f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par comparaison à une fonction positive, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

De façon analogue, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$.

Ainsi la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Ainsi pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$.

b) Soit P, Q et $R \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \langle \lambda P + R | Q \rangle = \lambda \langle P | Q \rangle + \langle R | Q \rangle \\ (ii) \quad \langle P | Q \rangle = \langle Q | P \rangle \\ (iii) \quad \langle P | \lambda Q + R \rangle = \lambda \langle P | Q \rangle + \langle P | R \rangle \\ (iv) \quad \langle P | P \rangle \geq 0 \\ (v) \quad \langle P | P \rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0 \end{array} \right.$

Pour (i) On a bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(x) + R(x))Q(x)f(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)Q(x)f(x) dx$$

Pour (ii) On a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)P(x)f(x) dx$

Pour (iii) vrai avec (i) et (ii)

Pour (iv) On a $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x)f(x) \geq 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)f(x) dx \geq 0$ donc $\langle P | P \rangle \geq 0$

Pour (v) On suppose $\langle P | P \rangle = 0$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)f(x) dx = 0$ or la fonction $x \mapsto P^2(x)f(x)$ est continue et positive sur \mathbb{R} , donc $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x)f(x) = 0$ or f ne s'annule pas, donc $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x) = 0$ ainsi P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

On a démontré que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. Une famille orthogonale

a) On va encore effectuer une démonstration par récurrence de $\mathcal{P}(n)$:

$$\langle \forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle \rangle$$

Initialisation Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P | H_0 \rangle = \langle P^{(0)} | H_0 \rangle$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P | XH_n - H_n' \rangle = \langle P | XH_n \rangle - \langle P | H_n' \rangle$

Sous réserve d'existence, on effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto P(x)H_n(x)$, pour $A < B$,

$$\int_A^B x f(x)(P(x)H_n(x)) dx = \left[-f(x)(P(x)H_n(x)) \right]_A^B + \int_A^B f(x)(P'(x)H_n(x) + P(x)H_n'(x)) dx$$

On a $P(B)H_n(B)f(B) - P(A)H_n(A)f(A)$ qui tend vers 0 lorsque $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$ par croissance comparée, donc $\langle P | XH_n \rangle = \langle P | H_n' \rangle + \langle P' | H_n \rangle$, puis $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P' | H_n \rangle = \langle (P')^{(n)} | H_0 \rangle$ par hypothèse de récurrence donc $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P^{(n+1)} | H_0 \rangle$ d'où l'hérédité.

Conclusion On a montré par récurrence que

$$\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle.$$

b) D'après la question précédente, pour tout P tel que $\deg P < n$, on a

$$\langle P | H_n \rangle = \langle 0 | H_0 \rangle = 0,$$

donc si $0 \leq i < j$, on a $\deg(H_i) = i < j$ d'après **1**. Ainsi $\langle H_i | H_j \rangle = 0$.

La famille $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale et formée de $n + 1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, (H_0, H_1, \dots, H_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|H_n\|^2 = \langle H_n | H_n \rangle = \langle H_n^{(n)} | H_0 \rangle$ d'après **a**.

En utilisant **2**, $H_n^{(n)} = (H_n')^{(n-1)} = n(H_{n-1}')^{(n-1)} = \dots = n!H_0^{(0)} = n!H_0$ donc

$$\|H_n\|^2 = n! \langle H_0 | H_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} f = 1$$

d'après le rappel donc $\|H_n\| = \sqrt{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) On a $H_1 = X, H_2 = X^2 - 1$ et $H_3 = X^3 - 3X$ car $H_3 = X(X^2 - 1) - 2X$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{i!}}H_i\right)_{0 \leq i \leq 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ d'après **b** et **c**.

Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et comme les vecteurs sont non nuls, il s'agit d'une base orthonormée de $\dim \mathbb{R}_3[X]$.

On a $P = a_0H_0 + a_1H_1 + a_2H_2 + a_3H_3$. Par unicité des coefficients du polynôme,

$$\text{on a } \begin{cases} 1 = a_3 \\ 1 = a_2 \\ 1 = a_1 - 3a_3 \\ 1 = a_0 - a_2 \end{cases} \quad \text{d'où } P = 2H_0 + 4H_1 + H_2 + H_3.$$

Ainsi le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_0[X]$ est $2H_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ car $4H_1 + H_2 + H_3 \in \mathbb{R}_0[X]^\perp$ donc la distance cherchée est $\|4H_1 + H_2 + H_3\| = \left\| \frac{4}{\sqrt{1!}}H_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2!}}H_2 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3!}}H_3 \right\|$.

Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{1!}}H_1, \frac{1}{\sqrt{2!}}H_2, \frac{1}{\sqrt{3!}}H_3\right)$ est une famille orthonormale, on a

$$\|4H_1 + H_2 + H_3\| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{24}.$$

Ainsi $d = \sqrt{24}$.

Problème (CCINP) : Algèbre bilinéaire – CCP 2014 Maths 2

1.a Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est orthodiagonalisable.

Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PDP^T$.

1.b $\chi_S(X) = X^2 - \text{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\text{Sp}(S) = \{0\}$ et si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.

Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.

2.a Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$.

Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

2.b Supposons que $x \in S(0, 1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.

On a bien montré que, $\text{pour tout } x \in S(0, 1), R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

3.a Supposons que s est symétrique défini positif.

Soit λ une valeur propre de s . Il existe un vecteur propre $x : x$ est non nul et $s(x) = \lambda x$.

Ainsi $0 < \langle s(x)|x \rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\lambda > 0$.

Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leq \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda \geq 0$.

3.b $s_{i,j}$ est la i -ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, or B est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , donc $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle$.

En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question

2.b, $s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

4. Les coefficients de $M^T M - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M , donc d'après le cours, l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue.

5. D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n , donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{i,j}| \leq 1$.

6. Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelle que soit la norme utilisée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ de la question 4, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_n\})$, or le singleton $\{0_n\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7.a D'après la question 1.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P \Delta P^{-1} = P \Delta P^T$.

Ainsi, $T(A) = \text{Tr}([AP \Delta] P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1} [AP \Delta]) = \text{Tr}(B \Delta)$ en posant $B = P^{-1} A P$.

A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc

B est orthogonale.

7.b On vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}((\lambda C + D)S) = \lambda \text{Tr}(CS) + \text{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \text{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

7.c Avec les notations de la question 7.a, $T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$

le (i, j) -ème coefficient d'une matrice M , $T(A) = \sum_{i=1}^n (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{i,j} \Delta_{j,i}$, mais Δ

est diagonale, donc $T(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$. D'après la question 5, et les λ_i étant positifs,

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(S).$$

Ainsi $t \leq \text{Tr}(S)$, mais de plus $\text{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc

$$t = \text{Tr}(S).$$

Inégalité d'Hadamard

8. L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, car S est diagonalisable (donc χ_S est scindé).

9. On calcule $S_\alpha^\top = S_\alpha$, puis, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top S_\alpha X = (DX)^\top S (DX) \geq 0$ car $DX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n (D^\top S D)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{(j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} [D^\top]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i},$$

mais D est diagonale, donc

$$\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}.$$

10. On peut appliquer l'inégalité (*) à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, or

$$\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{i,i} \right)^2 \det(S)$$

et $\frac{1}{n} \text{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1$, donc

$$\det(S) \leq \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_{i,i}} \right)^2 = \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

11. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top S_\varepsilon X = X^\top S X + \varepsilon \|X\|^2 \geq 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 3.b, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq \lambda_1 \leq s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$.

De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon) \text{ et on conclut en faisant tendre } \varepsilon \text{ vers } 0 : \prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

12. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $X^\top B X = (\Omega X)^\top A (\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$.

Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.

De plus, $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}([A\Omega\Delta]\Omega^\top) = \text{Tr}(\Omega^\top[A\Omega\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta)$.

13. D'après la question précédente, $\{\text{Tr}(AS) | A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{Tr}(B\Delta) | B \in \mathcal{U}\}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B \Omega^\top$.

En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et

que $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc $\{\text{Tr}(AS) | A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) | B \in \mathcal{U}\}$.

Prenons $x \in \{\text{Tr}(B\Delta) | B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \text{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\text{Tr}(B\Delta) | B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} minorée par 0.

Elle possède donc une borne inférieure.

14. Par application de l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$\frac{1}{n} \text{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}.$$

15. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n} \geq 1$.

Ainsi, d'après la question précédente, $\text{Tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}$.

16. Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geq n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top D X = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^n \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\text{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$,

donc $m = n(\det(S))^{1/n} = m \sqrt[n]{\det S}$.

Fin du corrigé