**DL 10**

# Nombre de sites visités par une marche aléatoire

Dans tout le texte, $d$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note $0_d$ le $d$-uplet dont toutes les coordonnées valent $0$, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(\mathsf{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\mathsf{S}_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathsf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{X}_k$$

La suite $(\mathsf{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\mathsf{R} = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathsf{S}_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathsf{S}_n = 0_d\} \neq \varnothing \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(\mathsf{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en $0_d$, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en $0_d$ sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathsf{N}_n$ le cardinal du sous-ensemble

$$\{\mathsf{S}_k,\ k \in \{0, \dots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre $\mathsf{N}_n$ est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(\mathsf{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après $n$ pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathbb{E}(\mathsf{N}_n)$ de la variable aléatoire $\mathsf{N}_n$.
La partie D est indépendante des parties précédentes.

## A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(\mathsf{X}+1)^{2n} = (\mathsf{X}+1)^n(\mathsf{X}+1)^n$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$



3. Si $\alpha \in ]0,1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Si $\alpha > 1$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4. Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose

$$\mathsf{I}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation

$$\mathsf{I}(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}$$

Établir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathsf{I}(x))$$

En déduire finalement un équivalent de $\mathsf{I}(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.
Justifier la formule :

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

## B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \mathsf{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathsf{S}_n = 0_d)x^n$$

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \mathsf{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathsf{R} = n)x^n$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à $1$. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe cl$\infty$ sur $]-1,1[$.
Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que

$$\mathsf{G}(1) = \mathbb{P}(\mathsf{R} \neq +\infty)$$

7. Si $k$ et $n$ sont des entiers naturels tels que $k \leqslant n$, montrer que

$$\mathbb{P}((\mathsf{S}_n = 0_d) \cap (\mathsf{R} = k)) = \mathbb{P}(\mathsf{R} = k)\mathbb{P}(\mathsf{S}_{n-k} = 0_d)$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathsf{S}_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathsf{R} = k)\mathbb{P}(\mathsf{S}_{n-k} = 0_d)$$

8. Montrer que
$$\forall x \in ]-1,1[,\ \mathsf{F}(x) = 1 + \mathsf{F}(x)\mathsf{G}(x)$$
Déterminer la limite de $\mathsf{F}(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(\mathsf{R} \neq +\infty)$.
9. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty$$
*L'élément* A *de* $\mathbb{R}^{+*}$ *étant fixé, on montrera qu'il existe* $\alpha \in ]0,1[$ *tel que*
$$\forall x \in ]1-\alpha, 1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > \mathsf{A}$$
10. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(\mathsf{S}_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(\mathsf{R} \neq +\infty) = 1$.
11. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathsf{Y}_i$ la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement
$$(\mathsf{S}_i \notin \{\mathsf{S}_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\})$$
Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$ :
$$\mathbb{P}(\mathsf{Y}_i = 1) = \mathbb{P}(\mathsf{R} > i)$$
En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\mathbb{E}(\mathsf{N}_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathsf{R} > i)$$
12. Conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(\mathsf{N}_n)}{n} = \mathbb{P}(\mathsf{R} = +\infty)$$
*On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite réelle convergeant vers le nombre réel* $\ell$*, alors*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$$

## C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, $d$ est égal à $1$ et on note donc simplement $0_d = 0$.
Par ailleurs, $p \in ]0,1[$, $q = 1-p$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(\mathsf{X} = 1) = p \ \text{ et } \ \mathbb{P}(\mathsf{X} = -1) = q$$
13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(\mathsf{S}_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité
$$\mathbb{P}(\mathsf{S}_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$$
14. Pour $x \in ]-1,1[$, donner une expression simple de $\mathsf{G}(x)$.
Exprimer $\mathbb{P}(\mathsf{R} = +\infty)$ en fonction de $|p-q|$.
Déterminer la loi de R.
15. On suppose que
$$p = q = \frac{1}{2}$$
Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}(\mathsf{R} = 2n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(\mathsf{N}_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.



## D. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$$
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ :
$$\mathsf{B}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$
16. Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que
$$a_n \leqslant \frac{1}{\mathsf{B}_n} \ \text{ et } \ 1 \leqslant a_n \mathsf{B}_{m-n} + a_0(\mathsf{B}_m - \mathsf{B}_{m-n})$$
17. On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour $n$ assez grand et
$$\mathsf{B}_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathsf{B}_n \ \text{ et } \ \mathsf{B}_{m_n} - \mathsf{B}_{m_n - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Montrer que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathsf{B}_n}$$
18. On suppose dans cette question qu'il existe $\mathsf{C} > 0$ tel que
$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathsf{C}}{n}$$
En utilisant la question 17 pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathsf{C}\ln(n)}$$

## E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$ : un théorème d'Erdös et Dvorestsky

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathsf{S}_k = 0_d)\mathbb{P}(\mathsf{R} > n-k)$$

Dans les questions 20 et 21, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(\mathsf{X} = (0,1)) = \mathbb{P}(\mathsf{X} = (0,-1)) = \mathbb{P}(\mathsf{X} = (1,0)) = \mathbb{P}(\mathsf{X} = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$
20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité
$$\mathbb{P}(\mathsf{S}_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2$$
21. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(\mathsf{N}_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.