Programme de colle – MP 1

Variables aléatoires

Suite et fin du chapitre.
Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
h) Variance, écart type et covariance	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
i) Loi faible des grands nombres	
Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a, $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité : $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ où σ est la variance commune des X_k. ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.
j) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, t^k.$$	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$. La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X{}'(1)$ et $G_X{}''(1)$. Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Fonctions vectorielles

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. ⇆ PC : vitesse instantanée. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire. Cas du produit scalaire.	⇆ PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.	⇆ PC et SI : vecteur accélération.
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E.	Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$. ⇆ PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Inégalité $\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.	
f) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Adaptation au cas vectoriel de l'étude des séries, des suites de fonctions, des séries de fonctions. C'est l'occasion de réviser ces chapitres vus il y a quelques mois dans le cas numérique.

Révisions des EDL de MPSI

Voir programme page suivante.

EDL

Extrait du programme officiel :

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration non exigible. ⇆ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
~~Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues :~~ $\cancel{a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x).}$	Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$. ⇆ I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.
Continuité de l'exponentielle.	
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.	Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.	Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
e) Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

⚠ Pas de méthode de résolution spécifique aux équations d'ordre 2 cette semaine.

Semaine prochaine : Fin EDL. Groupes monogènes, arithmétique, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Questions de cours :

(i) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

(ii) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson) : calcul de la fonction génératrice, on retrouve alors l'espérance et la variance.

(iii) Inégalités de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

(iv) Dérivation de $u \circ f$ si u est linéaire, de $B(f, g)$ si B est bilinéaire.

(v) Continuité de exp sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$.

(vi) (Révision MPSI) Espace (ou système fondamental) des solutions d'une équation différentielle scalaire homogène d'ordre 2 à cœfficients constants (énoncé seulement).
Forme d'une solution particulière lorsque le second membre s'écrit $P(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ où P est un polynôme (énoncé seulement).

(vii) Expliquer la transformation d'une équation différentielle scalaire d'ordre n en un système différentiel d'ordre 1 de dimension n.

(viii) Expression des solutions d'un système différentiel à cœfficients constants homogène $X' = AX$ sous forme exponentielle.

(ix) **CCINP 32, 74, 75, 96 (2022), 97, 99, 100, 110**. (Énoncés page suivante)

Extrait du programme de MPSI

Contenus	Capacités & commentaires
Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	⇆ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	⇆ PC et SI : modélisation de circuits électriques RC, RL ou de systèmes mécaniques linéaires.
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$. ⇆ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme. ⇆ PC et SI : modélisation des circuits électriques LC, RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

Exercices CCINP

1. **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
   (a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
   (b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

2. **CCINP 74** :
   (a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
      i. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
      ii. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
   (b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

3. **CCINP 75** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

   (b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.

   (c) En déduire la résolution du système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$.

4. **CCINP 96 (2022)** : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$.
   La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

   (a) Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

   (b) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:

      i. en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

      ii. en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E\left[t^X\right]$.

   Remarque : on admetra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (c) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1, 1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

5. **CCINP 97** : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

   (b) Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

6. **CCINP 99** :

   (a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

   (b) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

   (c) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

7. **CCINP 100** : Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
   Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

   (b) Calculer λ.

   (c) Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

   (d) X admet-elle une variance ? Justifier.

8. **CCINP 110** : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

   (a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

      i. Prouver que $R_X \geqslant 1$.
      On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
      Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

      Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

      ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

   (b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
      Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

      ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
      Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.