Programme de colle – MP 1

Variables aléatoires

Révision du programme de MPSI (voir derrière page).

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
d) Variables aléatoires discrètes	
Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathcal{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.
e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.	Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.	
Couple de variables aléatoires indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
f) Lois usuelles	
Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$	Notation $\mathcal{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	⇆ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.
g) Espérance	
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P(X = x)\ x)_{x \in X(\Omega)}$. Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\ P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret. Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.	
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Si $\lvert X \rvert \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Contenus	Capacités & Commentaires
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P(X=x)\ f(x))$ est sommable ; si tel est le cas : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\ P(X=x).$$	Démonstration non exigible.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y).$$	
h) Variance, écart type et covariance	
Moments.	
Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\ \mathrm{E}(Y^2)$.	
Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.	
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. $\leftrightarrows$ PC : écart quadratique énergétique.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.	
~~Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.~~	
Covariance de deux variables aléatoires.	
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne sera (re)vue qu'en début de semaine, ainsi que la loi faible des grands nombres et les fonctions génératrices.

Semaine prochaine : Variables aléatoires (fin), fonctions vectorielles, EDL.

Questions de cours :

(i) Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont. D'où le lemme des coalitions.

(ii) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson)
- Description
- Calcul de l'espérance
- Calcul de la variance

(iii) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

(iv) Formules de Koenig-Huygens pour la variance, puis la covariance. Variance d'une somme, cas où les variables aléatoires sont indépendantes deux à deux.

(v) Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à une forme bilinéaire symétrique positive $(x,y)\mapsto\varphi(x,y)$, application à $\varphi(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$ ou à la covariance, inégalité de Markov.

(vi) **CCINP 95 - 98 - 102 - 103 - 104 - 106 - 108 - 109 - 111** (énoncés page suivante)

(vii) **CCINP 95** : Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

(a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
i. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
ii. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

(b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
i. Déterminer la loi de X.
ii. Déterminer la loi de Y.

(viii) **CCINP 98** : Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

(a) Donner la loi de X. Justifier.

(b) Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
i. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
ii. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

(ix) **CCINP 102** : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

(a) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.

(b) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min\left(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\right),$$

min désignant « le plus petit élément de ».
i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
ii. Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

(x) **CCINP 103** : **Remarque** : les deux questions sont indépendantes. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

(a) i. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
ii. En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

(b) Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
Déterminer la loi de X.

(xi) **CCINP 104** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

(a) Préciser les valeurs prises par X.

(b) i. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

ii. Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

(c) i. Calculer $E(X)$.

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

(xii) **CCINP 106** : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in \,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

(a) Déterminer la loi du couple (U, V).

(b) Déterminer la loi marginale de U.

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.

(c) Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.

(d) U et V sont-elles indépendantes ?

(xiii) **CCINP 108** : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

(a) Déterminer les lois de X et de Y.

(b) i. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

ii. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Calculer $P(X = Y)$.

(xiv) **CCINP 109** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer la loi de Y.

(xv) **CCINP 111** : On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[,\ \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in \left]0,1\right[$.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

(b) i. Déterminer la loi de Y.
  ii. Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
  iii. Déterminer l'espérance de Y.

(c) Déterminer la loi de X.

Extrait du programme de MPSI

Contenus	Capacités & commentaires
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Loi P_X de la variable aléatoire X. Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
b) Lois usuelles	
	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $\mathcal{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $\mathcal{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.
c) Couples de variables aléatoires	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires. Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X,Y), les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes : $$P\big((X,Y)\in A\times B\big)=P(X\in A)\,P(Y\in B).$$	
Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1,\dots,A_n)\in\prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants. Si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	
e) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire réelle.	Interprétation en terme de moyenne pondérée. Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.
Relation : $\mathrm{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}P\big(\{\omega\}\big)X(\omega)$. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale. Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors	
$\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Inégalité de Markov. Si X et Y sont indépendantes : $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
f) Variance, écart type et covariance	
Moments. Variance, écart type.	Le moment d'ordre k de X est $\mathrm{E}(X^k)$. La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.	Application à la variance d'une variable aléatoire binomiale.