Programme de colle – MP 1

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

Reprise pour exercices.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

La notion de forme quadratique est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel.	⇆ PC : polariseur, loi de Malus.
b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect $(e_0, \dots, e_n)$, alors, pour tout x de E, $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux. ⇆ I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.
c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme. ⇆ SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.
d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation dans le registre matriciel. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». ⇆ SI : liaisons entre solides.

Semaine prochaine : Variables aléatoires.

Questions de cours :

(i) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour une **forme bilinéaire symétrique positive**. Cas d'égalité pour un produit scalaire.

(ii) Lorsqu'il est de dimension finie, l'orthogonal d'un sous-espace est un supplémentaire. Expression du projeté en base orthonormale.

(iii) Distance à un sous-espace de dimension finie.

(iv) Caractérisation des suites totales par des projecteurs orthogonaux.

(v) Matrice en base orthonormale d'un endomorphisme symétrique, d'une isométrie. Les projections orthogonales sont les projections symétriques et ne sont pas des automorphismes orthogonaux en général.

(vi) Théorème spectral.

(vii) **Matrices symétriques positives ou définies positives** : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** lorsque Sp $A \subset \mathbb{R}^+$ (on note $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) et **définie positive** lorsque Sp $A \subset \mathbb{R}_*^+$ (on note $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.)

(a) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)
si et seulement si $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\intercal AX \geqslant 0$ (respectivement > 0).

(b) **Racine carrée** : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$. Que dire de B si A est supposée définie positive ?

(c) **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\intercal A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.

(viii) **Formules variationnelles** : Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E.

(a) Montrer que l'application $f : x \longmapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum.

(b) Exprimer min f et max f en fonction des valeurs propres de u.

(c) Traduire ce résultat matriciellement.

(ix) **CCINP 39** : On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

(a) i. Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

ii. Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

(c) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

(x) **CCINP 68** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :

i. sans calcul,

ii. en calculant directement le déterminant det$(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

iii. en utilisant le rang de la matrice,

iv. en calculant A^2.

(b) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

(xi) **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$. On pose $\forall\ x\ \in\ E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

(a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

(b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

(xii) **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.

(a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

(b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

i. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

ii. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

(xiii) **CCINP 78** : Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

(a) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

i. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

ii. Démontrer que u est bijectif.

(b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

(c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

(xiv) **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que a<b.

(a) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

(b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall\ (f,g)\ \in\ E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

(c) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(xv) **CCINP 92** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\ ,B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

(a) Prouver que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

i. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

ii. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^{\perp}$.