Équations différentielles linéaires (MPSI)

I Équations différentielles du premier ordre

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles.

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL$_1$) toute équation du type

$$(L)\ \forall\, t\in D,\quad \alpha(t)f'(t)+\beta(t)f(t)=\gamma(t)$$

où α,β,γ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f:\ D\to\mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation

$$(L)\quad \alpha(t)y'+\beta(t)y=\gamma(t).$$

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions.

Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation (H) $\alpha(t)y'+\beta(t)y=0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

Remarque

La notation $\alpha(t)y'+\beta(t)y=\gamma(t)$ vient du fait que l'on peut l'écrire sous la forme $F(t,y,y')=0$ où t,y,y' sont trois variables indépendantes. f est solution si et seulement si pour tout t, $F\big(t,f(t),f'(t)\big)=0$. Dans cette notation, y et y' ne représentent pas des fonctions !

Toute la théorie sera valable sur des $\boxed{\text{intervalles } I}$ sur lesquels $\boxed{\alpha \text{ ne s'annule pas}}$ et sur lesquels $\boxed{\alpha,\beta,\gamma \text{ sont continues.}}$ On se ramène alors a une équation, dite **normalisée**, du type

$$(L)\quad y'+a(t)y=b(t)$$

avec $a=\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. L'équation homogène associée est $(H)\quad y'+a(t)y=0$.

2 Résolution de l'équation homogène

Propriété

*Soit (H) $y'+a(t)y=0$ avec a continue sur I. Les solutions de (H) sont les fonctions $f:\ t\in I\mapsto \lambda e^{-A(t)}$ pour $\lambda\in\mathbb{K}$, où A désigne **une** primitive de a.*

Remarque

Le physicien écrirait $\dfrac{y'}{y}=-a$ donc, en intégrant, $\ln|y|=-A+c$ donc $y=\pm e^c e^{-A}=\lambda e^{-A}$.

Correct ? Problème :

- y pourrait s'annuler. Mais on a facilement que soit on est tout le temps nul, soit on ne l'est jamais.
- Ensuite le $|y|$: par continuité, comme y ne s'annule jamais, elle est de signe constant.

Donc pourquoi pas, mais pénible à justifier.

Cependant, c'est un bon moyen de retrouver la formule !

Exemple

(H) $\forall\, x\in I,\ (x-1)y'+xy=0$ se ramène à $y'+\dfrac{x}{x-1}y=0$.

On résout sur $I=I_k$ pour $k=1$ ou 2 avec $I_1=]1,+\infty[$ et $I_2=]-\infty,1[$.

$x\mapsto\dfrac{x}{x-1}$ continue sur I_k. $\displaystyle\int\frac{x}{x-1}\,dx=x+\ln|x-1|+C$ sur I_k.

f solution de (H) sur I_k

si et seulement si $\exists\,\lambda_k\in\mathbb{K},\ \ \forall\, x\in I_k,\ \ f(x)=\lambda_k\dfrac{e^{-x}}{|x-1|}$

si et seulement si $\exists\,\mu_k\in\mathbb{K},\ \ \forall\, x\in I_k,\ \ f(x)=\mu_k\dfrac{e^{-x}}{x-1}$ car $x-1$ ne change pas de signe sur I_k.

Les solutions sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sont donc les

$$x\longmapsto\begin{cases}\mu_1\dfrac{e^{-x}}{x-1} & \text{si } x>1\\[2mm] \mu_2\dfrac{e^{-x}}{x-1} & \text{si } x<1\end{cases}$$

Raccord de solutions : Y a-t-il des solution sur $\mathbb{R}$? Par analyse-synthèse, une solution étant nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme ci-dessus sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Analyse : si c'est le cas, la continuité en 1 impose $\mu_1=\mu_2=0$. On n'a pas besoin d'étudier la dérivabilité en 1 ici (ce qui se ferait avec les taux d'accroissement ou le théorème limite de la dérivée par exemple).

Synthèse : la fonction nulle est bien solution sur $\mathbb{R}$, et c'est donc la seule.

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions définies sur D, (L) $y'+a(t)y=b(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f\in S_L \iff f-f_0\in S_H$ soit

$$S_L=\{f_0+h,\ h\in S_H\}=f_0+S_H.$$

b Principe de superposition

Propriété

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, a,b définies sur I avec $b(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k(t)$ où les α_k sont des scalaires et les b_k des fonctions. Si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, f_k est une solution particulière de (L_k) $y'+a(t)y=b_k(t)$, alors $f_0=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k$ est solution de (L) $y'+a(t)y=b(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k(t)$.

c Méthode de variation de la constante

Comment trouver une solution particulière dans le cas général ? Exactement comme pour résoudre l'équation homogène, avec le facteur intégrant : $f'+af=b \iff f'\mathrm{e}^A+af\mathrm{e}^A=b\mathrm{e}^A \iff \left(f\mathrm{e}^A\right)'=b\mathrm{e}^A \iff f=\left(\int b\mathrm{e}^A\right)\mathrm{e}^{-A}$.

Les solutions sont donc à chercher sous la forme $f(t)=g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.

C'est la **méthode de variation de la constante** (à partir de la solution générale de l'équation homogène.)

Remarques

- **R1 –** Les termes en g doivent se simplifier en traduisant que $x\mapsto g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est solution. Il ne doit rester que du g'. (car e^{-A} est solution de (H)).
- **R2 –** On obtient en fait toutes les solutions en primitivant g' avec la constante d'intégration.

II Équations différentielles du second ordre

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL$_2$) toute équation du type

$$(L)\quad \forall t\in D,\ \alpha(t)f''(t)+\beta(t)f'(t)+\gamma(t)f(t)=\delta(t)$$

où $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f: D\to\mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation $(L)\ \alpha(t)y''+\beta(t)y'+\gamma(t)y=\delta(t)$.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions. Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation $(H)\ \alpha(t)y''+\beta(t)y'+\gamma(t)y=0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

2 Résolution de l'équation homogène

Propriété

Soit $(E)\ ar^2+br+c=0$ équation caractéristique associée à $(H)\ ay''+by'+cy=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$.

(i) *Si (E) possède deux solutions distinctes $r_1,r_2\in\mathbb{K}$, les solutions de (H) sont les fonctions*

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto A\mathrm{e}^{r_1t}+B\mathrm{e}^{r_2t}$$

avec $(A,B)\in\mathbb{K}^2$.

(ii) *Si (E) possède une solution double $r\in\mathbb{K}$, les solutions de (H) sont les fonctions*

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto (A+Bt)\mathrm{e}^{rt}$$

avec $(A,B)\in\mathbb{K}^2$.

(iii) *Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, si (E) ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$, il y a deux solutions complexes conjuguées $\alpha\pm\mathrm{i}\omega\in\mathbb{C}$.*
Les solutions de (H) sont les fonctions

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto (A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))\mathrm{e}^{\alpha t}$$

avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ soit encore les

$$f:\ t\in\mathbb{R}\mapsto K\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

avec $(K,\varphi)\in\mathbb{R}^2$.

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{K}$ et δ définie sur D, $(L)\ ay''+by'+cy=\delta(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f\in S_L \iff f-f_0\in S_H$ soit $S_L=\{f_0+f,\ f\in S_H\}=f_0+S_H$.

b Cas de quelques seconds membres simples

Le principe de superposition reste valable, on sait trouver une solution particulière pour quelques seconds membres simples.

- S'il est constant, c'est facile.
- S'il est sous forme polynôme-exponentielle :

Propriété

Une EDL$_2$ de la forme $ay''+by'+cy=P(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$, $P\in\mathbb{K}[X]$ admet $\boxed{\text{une}}$ *solution de la forme*

$$f_0: t\mapsto t^kQ(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

où k est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ (0, 1 ou 2, donc) et Q un polynôme de même degré que P.

- S'il est sous forme d'un sinus ou d'un cosinus : pour une EDL$_2$ de la forme

$$ay''+by'+cy=P(t)\cos(\omega t)\text{ ou }P(t)\sin(\omega t)$$

avec $a,b,c,\omega\in\mathbb{R}$, $P\in\mathbb{R}[X]$, on se ramène au cas des exponentielles en écrivant

$$\cos(\omega t)=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\text{ et }\sin(\omega t)=\mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right).$$

On a facilement que si f est solution de $ay''+by'+cy=P(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, alors, comme $a,b,c\in\mathbb{R}$, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont solution de $ay''+by'+cy=P(t)\cos(\omega t)$ et $ay''+by'+cy=P(t)\sin(\omega t)$.

On trouvera donc $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme

$$t\mapsto t^kQ(t)(C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t))$$

où k est l'ordre de $\lambda=\mathrm{i}\omega$ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ (0, 1 ou 2, donc) et $Q\in\mathbb{R}[X]$ de même degré que P.

Remarque

Si $a,b,c\in\mathbb{C}$, on peut aussi passer par les formules d'Euler : $\cos(\omega t)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}$ et utiliser le principe de superposition.

- Quand le second membre est polynomial : on cherche une solution polynomiale ; c'est le même principe (et pour cause !) que la recherche d'une solution développable en série entière.