chapitreXXI

Équations Différentielles Linéaires

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie non nulle, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1 Position du problème

On s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ x_2' & = & a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t) \end{cases}$$

les fonctions $a_{i,j}$ et b_i étant données.

On cherche les solutions d'un tel systèmes, c'est-à-dire les fonctions $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ dérivables sur un certain intervalle I telles que, pour tout t dans I,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) & = & a_{1,1}(t)\varphi_1(t) + a_{1,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)\varphi_n(t) & + & b_1(t) \\ \varphi_2'(t) & = & a_{2,1}(t)\varphi_1(t) + a_{2,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)\varphi_n(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \varphi_n'(t) & = & a_{n,1}(t)\varphi_1(t) + a_{n,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)\varphi_n(t) & + & b_n(t) \end{cases}$$

2 Écriture matricielle

Un système différentiel linéaire s'écrit matriciellement

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L)$$

où A est la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les fonctions composantes dans la base canonique sont les $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, autrement dit

$$A \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(t)\dots\dots a_{1,n}(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}(t)\dots\dots a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \text{ et}$$

$$B : t \mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0\left(I,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$$

Une solution de (L) est une application $\Phi \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ au moins dérivable sur I et vérifiant

$$\forall t \in I \qquad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \;+\; B(t).$$

3 Équation scalaire d'ordre n

Définition

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \qquad (L)$$

toute fonction f n fois dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$, $f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t)$.

Propriété

Une telle équation se réécrit sous forme d'un système différentiel $Y = A(t)Y + B(t)$ en posant

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4 Problèmes de Cauchy et théorème de Cauchy linéaire

Propriété

Soit A et B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Φ est solution du ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad X(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

si et seulement si $\Phi \in \mathscr{C}^0(I,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ telle

$$\forall\, t \in I, \quad \Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] \mathrm{d}u.$$

Théorème : de Cauchy linéaire

Soit A et B deux applications ***continues sur*** *I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad X(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Corollaire : Cas des équations scalaires d'ordre n

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, si $t_0 \in I$, si $(y_0,\dots,y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution f sur I de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \qquad (L)$$

telle que $f(t_0) = y_0$, $f'(t_0) = y_1, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ (encore appelé ***problème de Cauchy****).*

Corollaire

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u+v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A+B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

5 Application des exponentielles à la résolution de systèmes différentiels à cœfficients constants

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Les solutions à l'équation différentielle $X' = AX$ sont les fonctions $t \mapsto \exp(tA)C$ où $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

L'unique solution au problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$ est la fonction $t \mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$.

Méthode : Cas diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** diagonalisable.

On diagonalise : $A = PDP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = DY$ qui se résout très simplement (système différentiel diagonal). Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).

On obtient alors, en notant $V_1, \dots V_n$ la base de vecteurs propres constituant les colonnes de P et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A correspondantes, que les solutions sont les

$$\boxed{t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k}$$

pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$. On retrouve ce résultat en exprimant les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tD) \times P^{-1}C = P \times \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right) \times C'$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} V_1 & \dots & e^{\lambda_n t} V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Méthode : Cas trigonalisable non diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** trigonalisable non diagonalisable.

On trigonalise : $A = PTP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = TY$ triangulaire qui se résout de bas en haut. Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).

De nouveau, on peut exprimer les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tT) \times P^{-1}C$$

où $\exp(tT)$ est encore triangulaire, avec, sur la diagonale, les exponentielles des cœfficients diagonaux de tT, mais les autres cœfficients ne se calculent pas simplement en général.

Méthode : Cas non trigonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** non trigonalisable.

Alors $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On résout dans $\mathbb{C}$ et on cherche les solutions réelles.

6 Point de vue vectoriel

On peut, plus généralement, parler d'équation différentielle avec $a : I \to \mathscr{L}(E)$ et $b : I \to E$ continue. Pour tout $t \in I$, $a(t)$ est un endomorphisme de E et $b(t)$ un vecteur de E.

L'équation s'écrit

$$x = [a(t)](x) + b(t) \qquad (L_1)$$

et une solution est une fonction $f : I \to E$ dérivable telle que pour tout $t \in I$, $f(t) = [a(t)](f(t)) + b(t)$.

Un choisissant une base $\mathscr{B}$ de E, on représente, pour tout $t \in I$, $a(t)$ par la matrice carrée $A(t)$, $b(t)$ par la colonne $B(t)$ et $f(t)$ par la colonne $\Phi(t)$.

Les propriétés de régularités de A, B, Φ sont les mêmes que celles de a, b, f et f est solution de (L_1) si et seulement si Φ est solution de

$$X = A(t)X + B(t) \qquad (L_2)$$

Ainsi, les théorèmes vu avec l'écriture matricielle restent valables.

Propriété

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

*f est solution du **problème de Cauchy***

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad x(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

si et seulement si $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$ telle

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big([a(u)](f(u)) + b(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème : de Cauchy linéaire

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x(t) = \big[a(t)\big](x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Tous les résultats qui suivent seront énoncés matriciellement mais pourront sur le même schéma, être traduits vectoriellement.

7 Principe de superposition

Propriété

Soient A, B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement tel que $B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et les B_i sont continues de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, Φ_i est une solution de $(E_i) \quad X' = A(t)X + B_i(t)$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i$ est solution de $(E) \quad X' = A(t)X + B(t)$.

II Structure de l'espace des solutions

On note

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L)$$

et

$$X' = A(t)X \qquad (H)$$

l'équation homogène associée, ainsi que S_L et S_H leurs ensembles de solutions respectifs.

1 Équation homogène

Théorème : de structure de l'équation homogène

Si $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, et $\dim S_H = n$.

Propriété

Pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\Phi \mapsto \Phi(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de S_H sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

2 Équation complète

Définition

On dit que la partie $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E est un sous-espace affine de E lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel F de E et un $x \in E$ tels que

$$\mathscr{F} = x + F = \{x + u, \quad u \in F\}$$

F est alors unique, et est appelé direction de $\mathscr{F}$. En revanche, pour n'importe quel $x \in \mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} = x + F$.

Théorème : de structure de l'équation complète

L'ensemble S_L des solutions de l'équation « complète » (L) est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, de direction S_H, donc de dimension n.

Corollaire

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation « complète »

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée, donc de dimension n.

3 Système fondamental de solutions

Définition

On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation homogène toute base $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ de S_H.

4 Méthode de variation des constantes

Lemme

Soit $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ un système fondamental de solution de l'équation homogène (H).

Alors pour tout $t \in I$, $(\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Méthode : Variation des constantes

Soit $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ un système fondamental de solution de l'équation homogène (H).

Alors il existe des fonctions $t \mapsto \lambda_1(t), \ldots, t \mapsto \lambda_n(t)$ dérivables sur I telles que $\Psi : t \mapsto \Psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\Phi_k(t)$ soit une solution de (L).

III ÉDL scalaires d'ordre 2

1 Position du problème, système associé

Les équations différentielles linéaire d'ordre 1 ont été étudiées en première année et les résultats des parties précédentes permettent de retrouver ceux du programme de MPSI.

Les équations différentielles linéaire d'ordre 2 étudiées alors se restreignaient au cas des cœfficients constant et d'un second membre combinaison linéaire de « polynômes-exponentielles ».

La théorie vue cette année permet d'étendre l'étude à toutes les équations à cœfficients et second membre continus.

On suppose donc que a, b, c, d sont quatre fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{L}$$

d'équation homogène associée

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{H}$$

On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 **en supposant que a ne s'annule pas sur** I (très important) et en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$:

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{L_{mat}}$$

où $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(x)}{a(x)} & -\frac{b(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$: f est solution de (L) si et seulement si $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ est solution de (L_{mat}).

2 Existence et unicité, structure

Les résultats vus à l'ordre n se traduisent pour $n = 2$.

Théorème

On suppose, toujours, que a, b, c, d sont continues sur I et que a ***ne s'annule pas sur I.***

- *Pour tout $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (L) telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$ (problème de Cauchy).*
- *L'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ (donc de dimension 2).*
- *Pour tout $t_0 \in I$, $f \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$ est un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^2$.*
- *L'ensemble S_L des solutions de (L) est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction S_H : $S_L = f_0 + S_H$ où f_0 est une solution particulière.*
- *Le principe de superposition s'applique.*

3 Wronskien

Remarquons que le couple (f,g) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si le couple (Φ,Ψ) où $\Phi=\begin{pmatrix} f\\ f'\end{pmatrix}$ et $\Psi=\begin{pmatrix} g\\ g'\end{pmatrix}$ en est un de $(H_1)\quad Y'=A(x)Y$ (une implication est évidente, et l'autre n'est pas difficile).

Définition : Wronskien

Si f, g sont deux solutions de (H) sur I, on définit sur I leur **wronskien**

$$w(f,g)\ :\ x\longmapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix} = f(x)g'(x)-g(x)f'(x).$$

Propriété

Soit f, g deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \qquad (H)$$

où a,b,c sont trois fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I. On note w (au lieu de $w(f,g)$) le wronskien de f et g. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- *(i) (f,g) est un système fondamental de solutions (ie une base de S_H).*
- *(ii) $\forall x\in I,\quad w(x)\neq 0.$*
- *(iii) $\exists x\in I,\quad w(x)\neq 0.$*

4 Cas où on connaît déjà une solution de (H)

Méthode

Lorsqu'une solution f de (H) est connue et ne s'annule pas sur I, on peut chercher une deuxième solution sous la forme $g : x\mapsto \lambda(x)f(x)$ avec λ deux fois dérivable. C'est une méthode de variation de la constante.

Si f s'annule, cela peut aussi fonctionner parfois.

En effet, on a alors $g'=\lambda' f+\lambda f'$ puis $g''=\lambda'' f+2\lambda' f'+\lambda f''$ donc g est solution de (L) si et seulement si

$$a\cdot(\lambda'' f+2\lambda' f'+\lambda f'')+b\cdot(\lambda' f+\lambda f')+c\cdot\lambda f=0$$

ce qui, vu que f est solution, se réduit à

$$af\lambda''+(2af'+bf)\lambda'=0$$

équation d'ordre 1 en λ' permettant de trouver λ.

5 Cas où les cœfficients sont polynomiaux

Méthode

Lorsque les cœfficients et le second membre sont polynomiaux, on peut essayer l'une des méthode suivantes pour trouver des solutions de (H)

- Trouver une solution sous la forme $x\mapsto x^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$: particulièrement efficace pour les équations de la forme $\beta x^2y''+\gamma xy'+\delta y=0$ où β,γ,δ sont des scalaires, dites d'Euler.
- Trouver des solutions polynomiales, en commençant par les termes de plus haut degré pour trouver le degré.
- Trouver des solutions DSE.
- Lorsque l'on connaît déjà une solution, utiliser la méthode du paragraphe précédent.

6 Variation des constantes

Pour trouver une solution particulière de (L) connaissant un système fondamental de solutions (f,g) de (H), on peut appliquer la méthode de variation des constantes à la version vectorialisée de (L) : $(L_1)\quad Y'=A(t)Y+B(t)$ où $Y=\begin{pmatrix} y\\ y'\end{pmatrix}$.

On cherche donc des **fonctions** λ et μ dérivables telles que $\begin{pmatrix} f_0\\ f_0'\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} f\\ f'\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} g\\ g'\end{pmatrix}$ soit solution de (L_1), c'est-à-dire $f_0=\lambda f+\mu g$ solution de (L) telle que $f_0'=\lambda f'+\mu g'$ ce qui revient à vérifier $\lambda' f+\mu' g=0$.

On calcule alors $f_0''=\lambda' f'+\lambda f''+\mu' g'+\mu g''$.

Puis, $af_0''+bf_0'+cf_0=a\lambda' f'+a\mu' g'=0$ si et seulement si $\lambda' f'+\mu' g'=0$.

Finalement, f_0 est solution de (L) si et seulement si on a un système à deux équations d'inconnues λ' et μ', dont le déterminant est le wronskien, ce qui permet de les calculer.

Méthode : Variation des constantes

Connaissant un système fondamental (f,g) de (H), on cherche une solution particulière f_0 de (L) telle que $\begin{pmatrix} f_0\\ f_0'\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} f\\ f'\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} g\\ g'\end{pmatrix}$ avec λ,μ deux fonctions dérivables sur I.

Cela revient à poser supposer $f_0=\lambda f+\mu g$, $f_0'=\lambda f'+\mu g'$ et alors $\lambda' f+\mu' g=0$.

En réinjectant dans l'équation (L), on trouve un système en λ' et μ' puis on les détermine et on primitive.

Ce système sera systématiquement $\boxed{\lambda'\begin{pmatrix} f\\ f'\end{pmatrix}+\mu'\begin{pmatrix} g\\ g'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ \frac{d}{a}\end{pmatrix}}$ où $\frac{d}{a}$ est le second membre de l'équation normalisée.

IV Exemples d'ÉDL scalaires non résolues

Il s'agit d'équations différentielles de la forme

$$a(x)y'+b(x)y=c(x)$$

ou

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=d(x)$$

où a,b,c,d sont continues sur I mais où a peut éventuellement s'annuler.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle scalaire non résolue, on résout classiquement sur chaque intervalle I_k sur lequel a ne s'annule pas en prenant soin d'indexer la ou les constantes par l'indice k de l'intervalle. Puis, on fait un raccord de solution en raisonnement par analyse-synthèse.

- On traduit qu'on est solution sur chaque intervalle I_k avec l'expression trouvée.
- On traduit l'équation aux points d'annulation de a pour obtenir éventuellement la valeur de la solution en ces points.
- On traduit la dérivabilité de la solution aux point de raccord en commençant en général par s'intéresser à la continuité.

  Pour la dérivabilité, on utilise des taux d'accroissement ou des développements limités.

  Le théorème de la limite de la dérivée est intéressant, mais on peut avoir des solutions dérivables au point de raccord sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

Une fois les informations trouver sur les constantes, la synthèse valide les solutions.