chapitreXXI

Équations Différentielles Linéaires

Extrait du programme officiel :

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1*, équation scalaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

La résolution explicite des systèmes linéaires à cœfficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2*, représenter certaines des courbes intégrales.*

Dans ce chapitre, I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* E *un espace normé de dimension finie.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.	
Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration non exigible. $\leftrightarrows$ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.
Cas des équations scalaires d'ordre n.	
Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E.	
Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.	
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $\quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.	Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
e) Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
f) Équations différentielles scalaires du second ordre	
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.	Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Plan du cours

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie non nulle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1 Position du problème

On s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} x_1' &=& a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n &+& b_1(t) \\ x_2' &=& a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n &+& b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n' &=& a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n &+& b_n(t) \end{cases}$$

les fonctions $a_{i,j}$ et b_i étant données.

On cherche les solutions d'un tel systèmes, c'est-à-dire les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dérivables sur un certain intervalle I telles que, pour tout t dans I,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) &=& a_{1,1}(t)\varphi_1(t) + a_{1,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)\varphi_n(t) &+& b_1(t) \\ \varphi_2'(t) &=& a_{2,1}(t)\varphi_1(t) + a_{2,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)\varphi_n(t) &+& b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \varphi_n'(t) &=& a_{n,1}(t)\varphi_1(t) + a_{n,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)\varphi_n(t) &+& b_n(t) \end{cases}$$

2 Écriture matricielle

Un système différentiel linéaire s'écrit matriciellement

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L)$$

où A est la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les fonctions composantes dans la base canonique sont les $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,

autrement dit $A\ :\ t\mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) \ldots\ldots\ldots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) \ldots\ldots\ldots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B\ :\ t\mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$

Une solution de (L) est une application $\Phi\ :\ t\mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ au moins dérivable sur I et vérifiant

$$\forall t\in I \qquad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t)\ +\ B(t).$$

Remarques

R 1 – On ne sait bien résoudre que si $n=1$ (programme de MPSI) ou si A constante (voir plus loin).

R 2 – Lorsque A est constante et diagonale, c'est facile ! Corollairement, si A est constante et diagonalisable, c'est facile.

Exercice : CCINP 74

1. **On considère la matrice** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. **On considère le système différentiel** $\begin{cases} x' = x+2z \\ y' = y \\ z' = 2x+z \end{cases}$, x,y,z **désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.**

---

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.
   (b) $P_A(X)=\det(XI_3-A)=\begin{vmatrix} -1+X & 0 & -2 \\ 0 & -1+X & 0 \\ -2 & 0 & -1+X \end{vmatrix}$.
   En développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient, après factorisation : $P_A(X)=(X-1)(X+1)(X-3)$.
   On obtient aisément, $E_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   On pose $e_1'=(0,1,0)$, $e_2'=(1,0,-1)$ et $e_3'=(1,0,1)$.
   Alors, $e'=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A.
2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x+2z \\ y' = y \\ z' = 2x+z \end{cases}$. Posons $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.
   Alors, $(S) \Longleftrightarrow X'=AX$. On note P la matrice de passage de la base canonique e de $\mathbb{R}^3$ à la base e'.
   D'après 1., $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et, si on pose $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A=PDP^{-1}$.
   Donc $(S) \Longleftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X$. On pose alors $X_1=P^{-1}X$ et $X_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$.
   Ainsi, par linéarité de la dérivation, $(S) \Longleftrightarrow X_1'=DX_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' &=& x_1 \\ y_1' &=& -y_1 \\ z_1' &=& 3z_1 \end{cases}$
   On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.

On trouve $\begin{cases} x_1(t) &= ae^t \\ y_1(t) &= be^{-t} \\ z_1(t) &= ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$. On obtient $\begin{cases} x(t) &= be^{-t} + ce^{3t} \\ y(t) &= ae^t \\ z(t) &= -be^{-t} + ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice : CCINP 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. **Démontrer que A n'est pas diagonalisable.**
2. **On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.**

   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. **En déduire la résolution du système différentiel** $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

---

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp}A = \{1\}$.
   Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_2, donc égale à I_2.
   Ce n'est visiblement pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.
2. $\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable. $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.
   Pour $v_1 = (2,-1)$ et $v_2 = (-1,0)$ (choisi de sorte que $f(v_2) = v_2 + v_1$) on obtient une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
3. On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore, grâce à la linéarité de la dérivation, à l'équation $Y' = TY$.
   Cela nous amène à résoudre le système $\begin{cases} a' = a + b \\ b' = b \end{cases}$ de solution générale $\begin{cases} a(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mu t \mathrm{e}^t \\ b(t) = \mu \mathrm{e}^t \end{cases}$
   Enfin, par la relation $X = PY$ on obtient la solution générale du système initial : $\begin{cases} x(t) = \big((2\lambda - \mu) + 2\mu t\big)\mathrm{e}^t \\ y(t) = \big(-\lambda - \mu t\big)\mathrm{e}^t \end{cases}$

3 Équation scalaire d'ordre n

Définition

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \qquad (L)$$

toute fonction f n fois dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$, $f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t)$.

Propriété

Une telle équation se réécrit sous forme d'un système différentiel $Y = A(t)Y + B(t)$ en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}$.

Remarque

Se ramener à un système différentiel d'ordre 1 en dimension n n'est pas la seule façon de résoudre une équation différentielle d'ordre n.

Ainsi, lorsque les cœfficients sont constants, les solutions de l'équation homogène $y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 y = 0$ sont les éléments de $\operatorname{Ker} P(D)$ où $P = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ et $D : f \mapsto f'$ est l'opérateur de dérivation, ce noyau se réécrivant avec le lemme de décomposition des noyaux.

Par exemple, pour une équation $y'' + \alpha y + \beta = 0$ dont l'équation caractéristique $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2, on aura

$$S_H = \operatorname{Ker}\left[\left(X^2 + \alpha X + \beta\right)(D)\right] = \operatorname{Ker}\left[((X - r_1 \operatorname{id})(X - r_2 \operatorname{id}))(D)\right] = \operatorname{Ker}(D - r_1 \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(D - r_2 \operatorname{id})$$

car $(X - r_1) \wedge (X - r_2) = 1$, ce qui permet de retrouver $S_H = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$.

En résolvant le système, on aurait diagonalisé la matrice (compagne) dont λ_1, λ_2 sont les valeurs propres distinctes et appliqué la même méthode vue dans CCINP 74.

L'exercice ci-dessous a été vu dans le chapitre sur la réduction.

Exercice

Résoudre $y^{(4)} = y$, E l''espace des fonction 4 fois dérivables, D opérateur de dérivation.
On cherche donc $\operatorname{Ker}\left((X^4 - 1)(D)\right)$ avec $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)\left(X^2 + 1\right)$.
Les solutions sont les $t \mapsto Ae^t + Be^{-t} + C\cos t + D\sin t$ pour $A, B, C, D \in \mathbb{K}$.

4 Problèmes de Cauchy et théorème de Cauchy linéaire

Propriété

Soit A et B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Φ est solution du ***problème de Cauchy*** $\begin{cases} \forall t \in I, \quad X(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

si et seulement si $\Phi \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ telle

$$\forall t \in I, \quad \Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] \mathrm{d}u.$$

Démonstration

Théorème fondamental de l'Analyse. □

Théorème : de Cauchy linéaire

Soit A et B deux applications ***continues sur*** *I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad X(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration : hors programme

L'idée est de trouver un point fixe de $T:\Phi\mapsto\left(t\mapsto X_0+\int_{t_0}^t\left[A(u)\Phi(u)+B(u)\right]\mathrm{d}u\right)$... mais on n'a pas les outils pour le faire facilement... $\square$

Exercice : Toujours nulle ou jamais nulle

Soit $\Phi\ :\ J\longrightarrow\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X'=A(t)X \tag{H}$$

où $A\ :\ J\longrightarrow\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est continue sur l'intervalle J. Montrer l'équivalence :

$$\exists t\in J\quad \Phi(t)=(0)\implies\forall t\in J\quad\Phi(t)=(0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t\in J\quad \Phi(t)=(0)\implies\forall t\in J\quad\Phi(t)=(0)$).

Exercice

Soit T un réel >0, $A\ :\ \mathbf{R}\longrightarrow\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $B\ :\ \mathbf{R}\longrightarrow\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ continues et T-périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$X'=A(t)X+B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T)=\Phi(0)$

Indication : on remarquera que Φ est T-périodique si et seulement si $\Phi=\Psi$ où $\Psi\ :\ t\mapsto\Phi(t+T)$.

Corollaire : Cas des équations scalaires d'ordre n

Si $a_0,a_1,\dots,a_{n-1},b$ sont continues sur I, si $t_0\in I$, si $(y_0,\dots,y_{n-1})\in\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution f sur I de l'équation

$$y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_0(t)y=b(t) \tag{L}$$

*telle que $f(t_0)=y_0,\ f'(t_0)=y_1,\dots,f^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$ (encore appelé **problème de Cauchy**).*

Remarque

⚠ On ne peut rien dire en général sur l'existence ou l'unicité de solutions qui vérifierait $f(t_0)=y_0$, $f(t_1)=y_1$, ..., $f(t_n)=y_n$ (problème de Dirichlet, ou problème aux limites).

Corollaire

Si $u,v\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{u\circ v=v\circ u,}$

$$\exp(u+v)=\exp u\circ\exp v=\exp v\circ\exp u.$$

Si $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\boxed{AB=BA,}$

$$\exp(A+B)=\exp A\times\exp B=\exp B\times\exp A.$$

Démonstration : Non exigible

1re solution : c'est un produit de Cauchy. Problème : au programme, seul le produit de Cauchy sur $\mathbb{C}$

Autre solution : C'est un... problème de Cauchy! Soit $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi_1:t\mapsto\exp(t(A+B))E_1$.

Alors $\phi_1':t\mapsto(A+B)\phi_1(t)$ donc Φ_1 est solution du problème de Cauchy $X'=(A+B)X$ et $X(0)=E_1$.

Puis $\Psi_1:t\mapsto\exp(tA)\exp(tB)E_1$ est tel que $\psi_1':t\mapsto(A+B)\psi_1(t)$ et $\Psi_1(0)=E_1$.

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (ici la matrice, $A+B$, est constante donc continue), $\Phi_1=\Psi_1$.

Cela signifie que la première colonne de $\exp(t(A+B))$ est égale à la première colonne de $\exp(tA)\exp(tB)$.

En réitérant sur les autres vecteurs de la bases canonique, on obtient $\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(t(A+B))=\exp(tA)\exp(tB)$.

L'évaluation en $t=1$ permet de conclure. $\square$

5 Application des exponentielles à la résolution de systèmes différentiels à cœfficients constants

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Les solutions à l'équation différentielle $X' = AX$ sont les fonctions $t \mapsto \exp(tA)C$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
L'unique solution au problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$ est la fonction $t \mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$.

Démonstration

Ce sont bien des solutions et C en est la valeur en 0 : on les a toutes soit par théorème de structure soit par théorème de Cauchy-linéaire. □

Remarque

⚠Mettre le C à gauche n'aurait aucun sens !

Méthode : Cas diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** diagonalisable.
On diagonalise : $A = PDP^-1$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = DY$ qui se résout très simplement (système différentiel diagonal). Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).
On obtient alors, en notant $V_1,\dots V_n$ la base de vecteurs propres constituant les colonnes de P et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A correspondantes, que les solutions sont les

$$\boxed{t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} V_k}$$

pour $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}^n$. On retrouve ce résultat en exprimant les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tD) \times P^{-1}C = P \times \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\dots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\right) \times C' = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t}V_1 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n t}V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exercice : CCINP 74

On retrouve les résultats.

Méthode : Cas trigonalisable non diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** trigonalisable non diagonalisable.
On trigonalise : $A = PTP^-1$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = TY$ triangulaire qui se résout de bas en haut. Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).
De nouveau, on peut exprimer les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tT) \times P^{-1}C$$

où $\exp(tT)$ est encore triangulaire, avec, sur la diagonale, les exponentielles des cœfficients diagonaux de tT, mais les autres cœfficients ne se calculent pas simplement en général.

Exercice : CCINP 75

On retrouve les résultats.

On remarque que $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$ avec N nilpotent ce qui permet de calculer facilement $\exp(tT)$.

Méthode : Cas non trigonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** non trigonalisable.
Alors $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On résout dans $\mathbb{C}$ et on cherche les solutions réelles.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm \mathrm{i}$, de vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

On trouve un système fondamental de solutions $\begin{pmatrix} \cos \\ \cos + \sin \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin \\ -\cos + \sin \end{pmatrix}$.

6 Point de vue vectoriel

On peut, plus généralement, parler d'équation différentielle avec $a : I \to \mathscr{L}(E)$ et $b : I \to E$ continue. Pour tout $t \in I$, $a(t)$ est un endomorphisme de E et $b(t)$ un vecteur de E.

L'équation s'écrit

$$x = [a(t)](x) + b(t) \qquad (L_1)$$

et une solution est une fonction $f : I \to E$ dérivable telle que pour tout $t \in I$, $f(t) = [a(t)](f(t)) + b(t)$.

Un choisissant une base $\mathscr{B}$ de E, on représente, pour tout $t \in I$, $a(t)$ par la matrice carrée $A(t)$, $b(t)$ par la colonne $B(t)$ et $f(t)$ par la colonne $\Phi(t)$.

Les propriétés de régularités de A, B, Φ sont les mêmes que celles de a, b, f et f est solution de (L_1) si et seulement si Φ est solution de

$$X = A(t)X + B(t) \qquad (L_2)$$

Ainsi, les théorèmes vu avec l'écriture matricielle restent valables.

Propriété

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

*f est solution du **problème de Cauchy*** $\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad x(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

si et seulement si $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$ telle

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big([a(u)]\,(f(u)) + b(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème : de Cauchy linéaire

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x(t) = \big[a(t)\big](x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Tous les résultats qui suivent seront énoncés matriciellement mais pourront sur le même schéma, être traduits vectoriellement.

7 Principe de superposition

Propriété

Soient A, B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement tel que $B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et les B_i sont continues de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, Φ_i est une solution de $(E_i) \quad X' = A(t)X + B_i(t)$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i$ est solution de $(E) \quad X' = A(t)X + B(t)$.

Démonstration

C'est une conséquence quasi-immédiate de la linéarité de $\Phi \mapsto \Phi' - A\Phi$. $\square$

II Structure de l'espace des solutions

On note

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L)$$

et

$$X' = A(t)X \qquad (H)$$

l'équation homogène associée, ainsi que S_L et S_H leurs ensembles de solutions respectifs.

1 Équation homogène

Théorème : de structure de l'équation homogène

Si $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, et $\dim S_H = n$.

Démonstration

Vérification immédiate par caractérisation des sous-espaces vectoriels, en notant qu'une solution est une fonction dérivable Φ telle que $\Phi' = A\Phi$ qui est continue, donc est bien automatiquement de classe $\mathscr{C}^1$.

La dimension est une conséquence de la propriété suivante. $\square$

Propriété

Pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\Phi \mapsto \Phi(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de S_H sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration

C'est un morphisme, et, par le thoérème de Cauchy-Lipschitz, on a bien le bijectivité. $\square$

Corollaire

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

2 Équation complète

Définition

On dit que la partie $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E est un sous-espace affine de E lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel F de E et un $x \in E$ tels que

$$\mathscr{F} = x + F = \{x + u, \quad u \in F\}$$

F est alors unique, et est appelé direction de $\mathscr{F}$. En revanche, pour n'importe quel $x \in \mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} = x + F$.

Théorème : de structure de l'équation complète

L'ensemble S_L des solutions de l'équation « complète » (L) est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, de direction S_H, donc de dimension n.

Démonstration

Comme pour toute équation linéaire, on prend une solution particulière Φ_0 (qui existe bien par théorème de Cauchy-Lipschitz), et alors Φ est solution si et seulement si $\Phi' - A\Phi = \Phi_0' - A\Phi_0$ si et seulement si $\Phi - \Phi_0 \in S_H$ par linéarité. □

Corollaire

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation « complète »

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée, donc de dimension n.

Exercice : CCINP 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. **Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle** $]-r, r[$ **de** $\mathbb{R}$, **avec** $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. **Est-ce que toutes les solutions de** $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ **sur** $]0,1[$ **sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur** $]-1,1[$ **?**

---

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
Pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1}$.
Donc $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}\right) x^n$.

   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1)a_n$.
Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.
2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.
Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x \in]0,1[$, $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \longmapsto x(x-1)$, $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 1$ sont continues sur $]0,1[$ et que la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est un plan vectoriel.
D'où l'absurdité.

3 Système fondamental de solutions

Définition

On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation homogène toute base $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ de S_H.

Remarque

Le problème est que l'on ne sait en général pas en déterminer un !
Dans le cas général, cela reste donc un outil assez théorique.

Exercice

On souhaite déterminer un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) & = tx(t) - y(t) \\ y'(t) & = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

1. **Chercher un système dont sont solutions les fonctions** $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ **et** $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$ **et conclure.**
2. **Retrouver le résultat en posant** $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.

On se ramène à $u' = -v$ et $v' = u$ avec en particulier $u'' = -u$. D'où un système fondamental de solution $\left(t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2}, t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2}\right)$.

4 Méthode de variation des constantes

Lemme

Soit $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ un système fondamental de solution de l'équation homogène (H).
Alors pour tout $t \in I$, $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration

Si on a des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1\Phi_1(t) + \cdots + \lambda_n\Phi_n(t) = 0$, alors la solution $\lambda_1\Phi_1 + \cdots + \lambda_n\Phi_n$ de (H) est nulle en un point, elle est donc nulle par unicité (théorème de Cauchy-Lipschitz) et comme elle forme une famille libre, tous les scalaires sont nuls. $\square$

Remarque

Bien sûr, réciproquement, si on a au moins un $t_0 \in I$ tel que $(\Phi_1(t_0), \dots, \Phi_n(t_0))$ est libre où $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sont solutions de (H), alors $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ l'est et, par dimension, forme une base de S_H.

Méthode : Variation des constantes

Soit $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ un système fondamental de solution de l'équation homogène (H).

Alors il existe des fonctions $t \mapsto \lambda_1(t), \dots, t \mapsto \lambda_n(t)$ dérivables sur I telles que $\Psi : t \mapsto \Psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\Phi_k(t)$ soit une solution de (L).

Remarque

Lorsque $n = 1$, on retrouve la méthode de variation de LA constante.

Démonstration

En effet, Ψ est solution de (L) si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$\Psi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k'(t)\Phi_k(t) + \lambda_k(t)\Phi_k'(t)\right) = A(t)\Psi(t) + B(t) = A(t)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\Phi_k(t) + B(t).$$

Mais comme les Φ_k sont des solutions de (H), cela revient à pour tout $t \in I$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k'(t)\Phi_k(t) = B(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(t)\Phi_k(t).$$

En décomposant $B(t)$ dans la base $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t))$ vu le lemme. Et toujours, avec ce résultat, on a de manière équivalente pour tout $t \in I$,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k'(t) = \beta_k(t).$$

Les β_k étant continues par continuité de B, on peut donc trouver chaque λ_k en primitivant les β_k et en déduire UNE solution de (E). $\square$

Exercice

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} (t^2+1)x' &= tx - y + 2t \\ (t^2+1)y' &= x + ty - 1 \end{cases}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, $B(t) = \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de façon à se ramener à l'équation d'ordre 1 : $X' = A(t)X + B(t)$, avec A et B continues sur $\mathbb{R}$.

Résolution du système homogène pas de méthode générale, l'espace des solutions est de dimension 2. A-t-on des solutions évidentes ? On « remarque » que les fonctions $\Phi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\Phi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ sont solutions. Elles sont indépendantes : elles forment un système fondamental de solutions et $S_H = \mathrm{Vect}(\Phi_1, \Phi_2)$.

Détermination d'une solution particulière par variations des constantes : on cherche des fonctions, dérivables sur $\mathbb{R}$, λ et μ telles que $\Psi = \lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda(t) + t\mu(t) \\ t\lambda(t) - \mu(t) \end{pmatrix}$ soit solution du système.

Après résolution, on trouve que c'est le cas si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda'(t) = \dfrac{t}{(t^2+1)^2}$ et $\mu'(t) = \dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}$.

Un calcul de primitives permet alors de choisir $\lambda(t) = \dfrac{-1}{2(t^2+1)}$ et $\mu(t) = \dfrac{3\,\mathrm{Arctan}\,t}{2} - \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

D'où une solution particulière $\Phi : t \mapsto \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3t\,\mathrm{Arctan}\,t - 1 \\ 3\,\mathrm{Arctan}\,t \end{pmatrix}$.

Conclusion Par théorème de structure, les solutions sont donc les fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3t\,\mathrm{Arctan}\,t - 1 \\ 3\,\mathrm{Arctan}\,t \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3t\,\mathrm{Arctan}\,t - 1 + \lambda + \mu t \\ 3\,\mathrm{Arctan}\,t + 3\,\mathrm{Arctan} + \lambda t - \mu \end{pmatrix}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

III ÉDL scalaires d'ordre 2

1 Position du problème, système associé

Les équations différentielles linéaire d'ordre 1 ont été étudiées en première année et les résultats des parties précédentes permettent de retrouver ceux du programme de MPSI.

Les équations différentielles linéaire d'ordre 2 étudiées alors se restreignaient au cas des cœfficients constant et d'un second membre combinaison linéaire de « polynômes-exponentielles ».

La théorie vue cette année permet d'étendre l'étude à toutes les équations à cœfficients et second membre continus.

On suppose donc que a, b, c, d sont quatre fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \qquad (L)$$

d'équation homogène associée

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \qquad (H)$$

On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 **en supposant que** a **ne s'annule pas sur** I (très important) et en posant $Y = \binom{y}{y'}$:

$$Y' = A(x)Y + B(x) \qquad (L_{mat})$$

où $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c(x)}{a(x)} & -\dfrac{b(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$: f est solution de (L) si et seulement si $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ est solution de (L_{mat}).

2 Existence et unicité, structure

Les résultats vus à l'ordre n se traduisent pour $n = 2$.

Théorème

*On suppose, toujours, que a, b, c, d sont continues sur I et que a **ne s'annule pas sur** I.*

- *Pour tout $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (L) telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$ (problème de Cauchy).*
- *L'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ (donc de dimension 2).*
- *Pour tout $t_0 \in I$, $f \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$ est un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^2$.*
- *L'ensemble S_L des solutions de (L) est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction S_H : $S_L = f_0 + S_H$ où f_0 est une solution particulière.*
- *Le principe de superposition s'applique.*

Exercice : dans un problème d'écrit

Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y = 0$$

est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.

Une implication est évidente. Pour l'autre, f est paire si et seulement $f = -\widehat{f}$ où $\widehat{f} : x \mapsto f(-x)$. Or f est solution si et seulement si $-\widehat{f}$ l'est. Il suffit alors d'utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $y_0' = f'(0)$

Exercice : dans un problème d'écrit

Soit a, b deux fonctions T-périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$

est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$.

Utiliser le théorème d'unicité, appliqué à f et $x \longmapsto f(x+T)$ où f est une solution.

3 Wronskien

Remarquons que le couple (f, g) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si le couple (Φ, Ψ) où $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $\Psi = \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ en est un de (H_1) $\quad Y' = A(x)Y$ (une implication est évidente, et l'autre n'est pas difficile).

Définition : Wronskien

Si f, g sont deux solutions de (H) sur I, on définit sur I leur **wronskien**

$$w(f, g) \ : \ x \longmapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x).$$

Propriété

Soit f, g deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{H}$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I. On note w (au lieu de $w(f, g)$) le wronskien de f et g. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (f, g) *est un système fondamental de solutions (ie une base de S_H).*

(ii) $\forall x \in I, \quad w(x) \neq 0.$

(iii) $\exists x \in I, \quad w(x) \neq 0.$

Démonstration

On vérifie que pour tout $x \in I$, $a(x)w'(x) + b(x)w(x) = 0$ donc (ii) est équivalent à (iii) par le théorème de Cauchy.
Puis si on a un x tel que $w(x) \neq 0$, $(f(x), g(x))$ est libre donc (f, g) l'est en repassant par une combinaison linéaire nulle.
Si, réciproquement, on a $x \in I$ tel que $w(x) = 0$, alors $\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$ sont liés donc $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ le sont donc f et g le sont. □

Exercice

Déterminer, en utilisant le wronskien, un système fondamental de solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega > 0$.

$x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont solutions, leur wronskien vaut $\omega \neq 0$.

Exercice

Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0) = g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général.
Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0.

Leur wronskien serait nul en x_0.

Exercice : EDL$_2$ newtoniennes

Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite newtonienne)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

$w' = 0$, difficile de faire plus simple, et on retrouve le résultat du premier exercice.

Exercice : Dans un problème d'écrit

On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soit (f, g) une base de l'espace des solutions de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Montrer que f et g ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).

Si elle sont impaires, elle sont nulles en 0, leur wronskien est nul. Si elles sont paires, leurs dérivées sont impaires, même chose. On peut aussi conclure en utilisant le théorème d'existence et une contradiction.

Exercice : Oral Mines

Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $z : t \longmapsto y(t+1)$. Alors z est solution, et $w(y, z)$ est nul en 0. Donc (y, z) est liée. Si $y = \tilde{0}$ il n'y a rien à faire. Sinon, il existe α tel que $z = \alpha y$. On conclut alors par récurrence sur k pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{N}$, puis par récurrence sur $-k$ pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{Z}^-$.

4 Cas où on connaît déjà une solution de (H)

Méthode

Lorsqu'une solution f de (H) est connue et ne s'annule pas sur I, on peut chercher une deuxième solution sous la forme $g : x \mapsto \lambda(x) f(x)$ avec λ deux fois dérivable. C'est une méthode de variation de la constante.
Si f s'annule, cela peut aussi fonctionner parfois.

En effet, on a alors $g' = \lambda' f + \lambda f'$ puis $g'' = \lambda'' f + 2\lambda' f' + \lambda f''$ donc g est solution de (L) si et seulement si

$$a \cdot (\lambda'' f + 2\lambda' f' + \lambda f'') + b \cdot (\lambda' f + \lambda f') + c \cdot \lambda f = 0$$

ce qui, vu que f est solution, se réduit à

$$af\lambda'' + (2af' + bf)\lambda' = 0$$

équation d'ordre 1 en λ' permettant de trouver λ.

5 Cas où les cœfficients sont polynomiaux

Méthode

Lorsque les cœfficients et le second membre sont polynomiaux, on peut essayer l'une des méthode suivantes pour trouver des solutions de (H)

- Trouver une solution sous la forme $x \mapsto x^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$: particulièrement efficace pour les équations de la forme $\beta x^2 y'' + \gamma x y' + \delta y = 0$ où β, γ, δ sont des scalaires, dites d'Euler.
- Trouver des solutions polynomiales, en commençant par les termes de plus haut degré pour trouver le degré.
- Trouver des solutions DSE.
- Lorsque l'on connaît déjà une solution, utiliser la méthode du paragraphe précédent.

Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ (H) $\quad x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$.

Équation d'Euler, la première méthode conduit aux solutions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto x^5$, le wronskien permet de voir qu'il s'agit bien d'un système fondamental de solutions.

Exercice

Résoudre sur $]1, +\infty[$ (H) $\quad \left(1 - x^2\right) y'' + 2xy' - 2y = 0$.

On cherche des solutions polynomiales, le terme de plus haut degré nous dit que celui-ci est 1 ou 2.
On cherche alors les solution $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On trouve toutes les solutions : $x \mapsto a(x^2 + 1) + bx$ qui forment bien un plan vectoriel.

Exercice

Trouver les solutions DSE de l'équation (H) $2xy'' + y' - y = 0$.
Terminer la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ **en posant** $t = \sqrt{2x}$.

On cherche les solutions DSE, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)(n+1)a_{n+1} = a_n$. Soit $a_0 = 0$ et il s'agit de la fonction nulle.

Soit $a_0 \neq 0$ et d'Alembert nous donne un rayon de convergence $+\infty$.

On exprime ensuite la solution $f(x) = a_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ si $x \geqslant 0$ et $a_0 \cos\left(\sqrt{-2x}\right)$ si $x \leqslant 0$.

Cela donne une droite de solution engendrée par $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il faut trouver une solution indépendante. La variation de la constante donne des calculs pénibles. On peut deviner un $\operatorname{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$...

Effectuons le changement de variable : on pose $z(t) = z\left(\sqrt{2x}\right) = y(x) = y\left(t^2/2\right)$, et on a bien z deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si y l'est.

Puis, pour tout $t > 0$, $z'(t) = ty'\left(t^2/2\right)$, $z''(t) = t^2 y'\left(t^2/2\right) + y'\left(t^2/2\right)$ donc notre équation est équivalente à $z'' = z$ d'où z, d'où nos solutions $x \mapsto \lambda \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right) + \mu \operatorname{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$.

6 Variation des constantes

Pour trouver une solution particulière de (L) connaissant un système fondamental de solutions (f, g) de (H), on peut appliquer la méthode de variation des constantes à la version vectorialisée de (L) : (L_1) $\quad Y' = A(t)Y + B(t)$ où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.

On cherche donc des **fonctions** λ et μ dérivables telles que $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ soit solution de (L_1), c'est-à-dire $f_0 = \lambda f + \mu g$ solution de (L) telle que $f_0' = \lambda f' + \mu g'$ ce qui revient à vérifier $\lambda' f + \mu' g = 0$.

On calcule alors $f_0'' = \lambda' f' + \lambda f'' + \mu' g' + \mu g''$.

Puis, $af_0'' + bf_0' + cf_0 = a\lambda' f' + a\mu' g' = 0$ si et seulement si $\lambda' f' + \mu' g' = 0$.

Finalement, f_0 est solution de (L) si et seulement si on a un système à deux équations d'inconnues λ' et μ', dont le déterminant est le wronskien, ce qui permet de les calculer.

Méthode : Variation des constantes

Connaissant un système fondamental (f, g) de (H), on cherche une solution particulière f_0 de (L) telle que

$\binom{f_0}{f_0'} = \lambda\binom{f}{f'} + \mu\binom{g}{g'}$ avec λ, μ deux fonctions dérivables sur I.
Cela revient à poser supposer $f_0 = \lambda f + \mu g$, $f_0' = \lambda f' + \mu g'$ et alors $\lambda' f + \mu' g = 0$.
En réinjectant dans l'équation (L), on trouve un système en λ' et μ' puis on les détermine et on primitive.

Ce système sera systématiquement $\boxed{\lambda'\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu'\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \end{pmatrix}}$ où $\frac{d}{a}$ est le second membre de l'équation normalisée.

Exercice : CCINP 31

1. **Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.**
2. **Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.**

---

1. En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$.

   Donc, $x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

   Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$.
   Par la méthode de variation des constantes,

   on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$ avec λ, μ fonctions dérivables vérifiant : $\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3 x \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x \cos^3 x \\ \mu'(x) = \cos^4 x \end{cases}$.

   $\lambda(x) = \frac{1}{4}\cos^4 x$ convient.

   D'après la question 1., $\mu(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ convient.

   On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \frac{1}{4}\cos^5 x + \left(\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right)\sin x$ est une solution particulière de (E).
   Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par :

   $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + y_p(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

IV Exemples d'ÉDL scalaires non résolues

Il s'agit d'équations différentielles de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ou

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

où a, b, c, d sont continues sur I mais où a peut éventuellement s'annuler.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle scalaire non résolue, on résout classiquement sur chaque intervalle I_k sur lequel a ne s'annule pas en prenant soin d'indexer la ou les constantes par l'indice k de l'intervalle. Puis, on fait un raccord de solution en raisonnement par analyse-synthèse.

- On traduit qu'on est solution sur chaque intervalle I_k avec l'expression trouvée.
- On traduit l'équation aux point d'annulation de a pour obtenir éventuellement la valeur de la solution en ces points.
- On traduit la dérivabilité de la solution aux point de raccord en commençant en général par s'intéresser à la continuité.
  Pour la dérivabilité, on utilise des taux d'accroissement ou des développements limités.
  Le théorème de la limite de la dérivée est intéressant, mais on peut avoir des solutions dérivables au point de raccord sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

Une fois les informations trouver sur les constantes, la synthèse valide les solutions.

Exercice : CCINP 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1. **Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.**
2. **Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.**
3. **L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?**

---

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0,+\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. Si on cherche à prolonger les solutions de (E) sur $[0,+\infty[$, alors le prolongement par continuité ne pose pas de problème en posant $f(0) = 0$.
   Par contre, aucun prolongement ne sera dérivable en 0 car $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$ est l'ensemble vide.

Exercice

Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$.

Sur $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k)\cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$. (Reconnaître la dérivée d'un quotient en divisant par $\cos^2$).

Solutions sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto (\sin t + \lambda)\cos t$. Pour le raccord, effectuer un développement limiter à gauche et à droite de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Exercice : Écrit CCP 2005

Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. **Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0,+\infty[$.**
2. **Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?**
3. **Dans le cas où $n \geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?**

Soit l'équation différenielle linéaire du premier ordre, homogène : $(E_n)\;\; xy' - ny = 0\;\;$ *où* n est un entier strictement positif.

1. On obtient sans mal que sur I l'espace des solutions est $\mathrm{Vect}(x \in I \mapsto x^n)$ et sur J, $\mathrm{Vect}(x \in J \mapsto x^n)$.
2. Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme dérivable en 0, sa courbe est donc une droite.
   En conclusion : l'espace des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.
3. Supposons $n > 1$, soit f une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$
   En évaluant l'équation en 0, on tire $f(0) = 0$.

La continuité en 0 n'impose aucune condition sur α et β, la dérivabilité non plus car $\dfrac{\alpha x^n - 0}{x} = \alpha x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ et $\dfrac{\beta x^n - 0}{x} = \beta x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ car $n > 1$.

Réciproquement : toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \leqslant 0 \\ \beta x^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $h_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$