chapitreXXVI
Fonctions vectorielles

I Fonction vectorielles d'une variable réelle

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit I , J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides.

Soit $(E,\|\|_E)$, $(F,\|\|_F)$, $(G,\|\|_G)$ des K-espaces vectoriels **de dimension finie** non réduits au vecteur nul.

Rappel : les normes étant équivalentes en dimension finie, les notions de limite ne dépendent pas de la norme.

1 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

a Définition

Définition : Dérivée

Soit $f: I \to E$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable au point** a si et seulement si $\dfrac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **dérivé de** f **au point** a.

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$.

Alors $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est la **fonction dérivée** de f.

Propriété : DL_1

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0_E$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fausse.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base de E, $f = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k, f_k l'est et alors $f'(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(a) e_k$ (respectivement $f' = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k' e_k$).

b Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivables de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f : I \to E$ dérivable sur I, alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée $(u\circ f)' = u \circ f'$.

Propriété : Image par une application bilinéaire

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ dérivables sur I, on note $B(f,g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.

Alors $B(f,g)$ dérivable sur I et $(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$.

Corollaire

Dérivée d'un produit de fonctions dérivables fg où $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to E$: $(fg)' = f'g + fg'$.

Corollaire

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien : $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

Propriété : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f\circ\varphi$ dérivable et $(f\circ\varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$.

c Applications de classe $\mathscr{C}^n$

Définition : Classe

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k l'est et alors si $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)} e_k$.

Propriété : Linéarité

$\mathscr{C}^n(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $n \in \mathbb{N}$ et si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $u \circ f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et si $n \in \mathbb{N}$, $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$.

Propriété : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, $g \in \mathscr{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right).$$

Corollaire

Si $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ alors $f \cdot g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Propriété : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

2 Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

a Fonctions continues pas morceaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a, b] \to E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \\ \quad \text{et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable} \\ \quad \text{par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f.

On note $\mathscr{C}_m([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. f est continue par morceaux ssi pour tout k, f_k l'est.

Corollaire : Opérations

Si $f, g \in \mathscr{C}_m([a, b], E)$, $\varphi \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, $f + \lambda g$ et $\phi \cdot f$ sont continues par morceaux.

Propriété

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur** I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.

b Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Propriété : Indépendance du choix de la base

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$.

Définition : Intégrale sur un segment

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le vecteur $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k$.

On pose $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0_E$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété : Linéarité

$f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire de $\mathscr{C}_m([a,b],E)$.

Propriété : Relation de Chasles

Si $f \in \mathscr{C}_m(I,E)$ et $a,b,c \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

c Sommes de Riemann

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ une subdivision et pour tout k entre 0 et $n-1$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$ alors on pose la somme de Riemann $R(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(\xi_k)$.

Pour une fonction numérique, cela correspond à une somme d'aires de rectangles.

Si la subdivision est régulière, pour tout k, $a_{k+1} - a_k = \dfrac{b-a}{n}$ et pour tout k, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

On obtient alors $S(f,\sigma,\xi) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$.

Et si on prend les rectangles à gauche, on a alors $\xi_k = a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, $S(f,\sigma,\xi) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Théorème

Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],E)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

alors $R_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Inégalité triangulaire intégrale

Si $f \in \mathscr{C}_m(I,E)$, $a,b \in I$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \left|\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t\right|$.

(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

d Intégrale et primitive

Définition : Primitive

$g : I \to E$ est une **primitive** de $f : I \to E$ si g dérivable sur I et $g' = f$.

Propriété

$f : I \to E$ dérivable sur I est constante si et seulement si $f' \equiv 0_E$ sur I.

Propriété

*Soit $f : I \to E$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*

Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I,\ F(x) = G(x) + C$.

Théorème : fondamental de l'analyse

Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans E et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a,b \in I$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

(iii) Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

*(iv) **Inégalité des accroissements finis** :*
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\|f'\| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Propriété

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to E$ continue.

L'application $\varphi : \begin{array}{|ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$.

e Intégration par parties

Propriété

Si $u \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, $v \in \mathscr{C}^1(I,E)$,

$$\forall a,b \in I,\ \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

f Changement de variable

Propriété

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f \in \mathscr{C}(I,E)$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)\cdot f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u.$$

3 Formules de Taylor

Définition

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

a Taylor reste intégrale

Théorème

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

b Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

c Formule de Taylor-Young

Propriété : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to E$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

⚠La réciproque est fausse : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.

II Séries vectorielles

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$., $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

1 Généralités

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in E$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Propriété

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Propriété

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge.

Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right) e_k.$$

Propriété : Divergence grossière

Si $u_n \not\to 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de ***divergence grossière***.

⚠La réciproque est fausse !

Si $u_n \to 0_E$, ***ON NE PEUT RIEN DIRE*** sur la convergence de $\sum u_n$.

2 Reste d'une série convergente

Définition

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$ et $\|R_n - S\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3 Convergence absolue

Définition

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème : En dimension finie, convergence absolue $\Rightarrow$ convergence

Si E est de dimension finie et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fausse.

Propriété

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

III Sommation des relations comparaison

1 Cas de divergence

Théorème

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite ***réelle positive***. On suppose que $\sum v_n$ ***diverge***.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.

2 Cas de convergence

Théorème

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite ***réelle positive***. On suppose que $\sum v_n$ ***converge***.

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = o(\rho_n)$.

(iii) Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.

IV Suites et séries de fonctions vectorielles

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de E.

Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

1 Suites de fonctions

Définition : Convergence simple

Soit $f : A \to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur A vers f** lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon},\ \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in A,\ \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Théorème : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 Pour tout n, f_n est continue en x_0 (respectivement sur A).

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de chaque point de A).

Alors

C1 f est continue en x_0 (respectivement sur A).

Théorème : de la double limite

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que

H1 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.

Alors on a $b \in F$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$.

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

Théorème : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 f est continue sur $[a, b]$

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.

Théorème : Interversion limite et dérivée

Soient $f : I \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.

H3 La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.

Alors

C1 f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

C2 $f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.

C3 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^p$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.

H2 Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.

H3 La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.

Alors

C1 $f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.

C2 Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.

C3 Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.

2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E^A. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Définition

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x\in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
- **converge uniformément au voisinage de $a\in\overline{A}$ s'il existe $r>0$ tel que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A\cap B(a,r)$.**

On note, pour $f\in E^A$ bornée, $N_\infty(f) = \sup_{x\in A}\|f(x)\|_E$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

Théorème : Continuité d'une série de fonctions vectorielles

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $a\in A$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en a (respectivement sur A).*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a (respectivement sur A).*

Corollaire

La somme d'une série entière $f : z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

Théorème : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $(b_n)_n\in E^{\mathbb{N}}$ et $a\in\overline{A}$ (éventuellement infini si $F=\mathbb{R}$). On suppose que

H1 *$\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors

C1 *$\sum b_n$ converge.*

C2 *$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.*

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$.

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E,\|\cdot\|_E)$.

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a,b\in\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $E^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$.*

C2 *$\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.*

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a\in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x\mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **H2** *Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I.*
- **H3** *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

- **C1** $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*
- **C2** *Pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $f^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*
- **H3** *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

- **C1** $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
- **C2** *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

V Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.

1 Définition

Définition

Une norme N sur une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ est dite **sous-multiplicative** si pour tout $(a,b) \in \mathscr{A}^2$, $N(ab) \leqslant N(a)N(b)$.

On parle aussi de **norme d'algèbre**.

Propriété

On a alors, pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N\left(a^k\right) \leqslant N(a)^k.$$

Corollaire

Soit $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie de N norme d'algèbre, et $a \in \mathscr{A}$.

- *(i) La série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.*
- *(ii) Si $N(a) < 1$, alors la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} a^k$ est absolument convergente.*
  Si e est le neutre de $\mathscr{A}$, on a alors $e-a$ inversible, d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^k$.

Corollaire

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

Définition : Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $\exp u = \mathrm{e}^u = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\exp A = \mathrm{e}^A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

2 Propriétés

Propriété

Si A matrice représentant $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\exp A$ représente $\exp u$ dans la même base.

Propriété

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

- *(i) Si $u \circ v = v \circ u$, $\exp(u) \circ v = v \circ \exp(u)$.*
- *(ii) Si $u \circ v = v \circ u$,*
$$\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u).$$
- *(iii) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(t\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{id}_E$.*
- *(iv) $\exp(0) = \mathrm{id}_E$.*

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- *(i) Si $AB = BA$, $\exp(A)B = B\exp(A)$.*
- *(ii) Si $AB = BA$,*
$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$
- *(iii) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(tI_n) = \mathrm{e}^t I_n$.*
- *(iv) $\exp(0_n) = I_n$.*

Propriété

Les applications $\exp : \begin{array}{|ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & \exp u \end{array}$ *et* $\exp : \begin{array}{|ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \exp A \end{array}$ *sont continues.*

Propriété

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Les applications $\phi : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(tu) \end{array}$ *et* $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$$

$$\varphi'(t) = A \times \exp(tA) = \exp(tA) \times A.$$

Propriété

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u+v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A+B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

Corollaire

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ *et* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors*

$$\exp(u) \in \mathscr{GL}(E) \quad \text{et} \quad \exp(u)^{-1} = \exp(-u)$$
$$\exp(A) \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

Propriété

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$*, alors*

$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P.$$

Propriété

- $\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- *Si* N *est nilpotente d'indice* p,

$$\exp N = I_n + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}.$$

Méthode : Avec une matrice nilpotente

Plus généralement, si on a N nilpotente et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n + N$, le calcul de $\exp A$ est facile.

C'est le cas lorsque A a une unique valeur propre λ, alors $\chi_A = (X-\lambda)^n$ est un polynôme annulateur par Cayley-Hamilton, donc $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.

Plus généralement, un résultat du programme montre que dans une base adaptée, on a une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ ou pour tout i, $A_i = \lambda_i I + N_i$ avec N_i nilpotente.

On vérifie facilement que l'exponentielle de cette matrice est $\begin{pmatrix} \exp A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_p \end{pmatrix}$.