chapitreXXVI

Fonctions vectorielles

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. ⇆ PC : vitesse instantanée. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables.	
Dérivabilité et dérivée de $L\circ f$, où L est linéaire.	
Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire.	
Cas du produit scalaire.	⇆ PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.	
Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	⇆ PC et SI : vecteur accélération.
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E.	Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ⇆ PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.	
Inégalité $\left\lVert\int_a^b f\right\rVert \leqslant \int_a^b \lVert f\rVert$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
f) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral.	
Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Table des matières

XXVI Fonctions vectorielles

I Fonction vectorielles d'une variable réelle

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit I , J des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides.
Soit $(E,\|\|_E)$, $(F,\|\|_F)$, $(G,\|\|_G)$ des K-espaces vectoriels **de dimension finie** non réduits au vecteur nul.
Rappel : les normes étant équivalentes en dimension finie, les notions de limite ne dépendent pas de la norme.

1 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

a Définition

Définition : Dérivée

Soit $f : I \to E$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable au point** a si et seulement si $\frac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **dérivé de** f **au point** a.

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$. Alors $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est la **fonction dérivée** de f.

Propriété : DL$_1$

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0_E$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Démonstration

Même démonstration que pour les fonctions numériques.

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $b \in E$ tel que $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) \to b$ si et seulement s'il existe $b \in E$ tel que $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) = b + \mathrm{o}(1)$ si et seulement si $f(a+h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$.

Par unicité de la limite, le b en question est bien $f'(a)$. □

Corollaire : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fausse.

Démonstration

Il suffit de passer à la limite dans le DL$_1$. □

Remarque

Comme pour les fonctions numériques, on définit aussi des dérivées à gauche et à droite de a (lorsque c'est possible) notée $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$: ce sont les dérivées des restrictions à $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ de f, et on a f dérivable en a si set seulement si elle l'est à gauche et à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k, f_k l'est et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(a) e_k$ (respectivement $f' = \sum_{k=1}^{n} f'_k e_k$).

Démonstration

Conséquence de la propriété analogue sur la limite appliquée au taux d'accroissement. □

b Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivables de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

Démonstration

Avec DL$_1$: si f et g sont dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \mathrm{o}(h)$ et $g(a+h) = g(a) + hg'(a) + \mathrm{o}(h)$ alors $(f+\lambda g)(a+h) = (f+\lambda g)(a) + h(f' + \lambda g')(a) + \mathrm{o}(h)$, d'où le résultat. □

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f : I \to E$ dérivable sur I, alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Remarque

⚠ ne pas confondre avec la formule de dérivée d'une composée !

Démonstration

Avec DL_1 : si $a \in I$, $u \circ f(a+h) = u\big(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\big) = u \circ f(a) + hu \circ f'(a) + hu(\varepsilon(h))$ avec $u(\varepsilon(h)) \to u(0) = 0$ par continuité de u, linéaire sur un espace de dimension finie.

Donc $u \circ f$ dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$. □

Exemple

La projection du vecteur vitesse est le vecteur vitesse de la projection du mouvement.

Propriété : Image par une application bilinéaire

Si $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ dérivables sur I, on note $B(f,g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.
Alors $B(f,g)$ dérivable sur I et $\big(B(f,g)\big)' = B\left(f', g\right) + B\left(f, g'\right)$.

Démonstration

Se voit avec DL_1 mais la discussion est assez pénible pour le o.
Le mieux est de revenir au taux d'accroissement : si $a \in I$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big(B\left(f(a+h), g(a+h)\right) - B\left(f(a), g(a)\right)\big) &= \frac{1}{h}\big(B\left(f(a+h) - f(a) + f(a), g(a+h)\right) - B\left(f(a), g(a)\right)\big)\\
&= \frac{1}{h}\big(B\left(f(a+h) - f(a), g(a+h)\right) + B\left(f(a), g(a+h) - g(a)\right)\big)\\
&= B\left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)), g(a+h)\right) + B\left(f(a), \frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right)\\
&\to B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right)
\end{aligned}$$

par continuité de B, bilinéaire sur des espaces de dimension finie et de g, dérivable. □

Remarque

Se généralise aux applications multilinéaires.

Exemple

Dérivation d'un déterminant.

Corollaire

Dérivée d'un produit de fonctions dérivables fg où $f : I \to \mathbb{K}$ et $g : I \to E$: $(fg)' = f'g + fg'$.

Corollaire

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien : $\left(f|g\right)' = \left(f'|g\right) + \left(f|g'\right)$.

Propriété : Composition

Si $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ dérivable et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$.

Démonstration

DL1. □

C Applications de classe $\mathscr{C}^n$

Définition : Classe

f est dite **de classe** $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.
f est dite **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.
f est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.

Remarque

On peut être dérivable sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par 0 en 0.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ *et* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ *base de* E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* I *si et seulement si pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, f_k *l'est et alors si* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)} e_k$.

Démonstration

Récurrence. □

Propriété : Linéarité

$\mathscr{C}^n(I, E)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et si* $n \in \mathbb{N}$ *et si* $f, g \in \mathscr{C}^n(I, E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.

Démonstration

Récurrence. □

Propriété : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ *et* $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$ *alors* $u \circ f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ *et si* $n \in \mathbb{N}$, $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$.

Démonstration

Récurrence. □

Exemple

La projection du vecteur accélération est le vecteur accélération de la projection du mouvement.

Propriété : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \to G$ *bilinéaire,* $f \in \mathscr{C}^n(I,E)$*,* $g \in \mathscr{C}^n(I,F)$ *alors* $B(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,G)$ *et si* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\left(B(f,g)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right).$$

Démonstration

Récurrence. □

Corollaire

Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$*,* $g \in \mathscr{C}^n(I,E)$ *alors* $f \cdot g \in \mathscr{C}^n(I,E)$ *et si* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Propriété : Composition

Si $f : I \to E$*,* $\varphi : J \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^n$ *telles que* $\varphi(J) \subset I$*, alors* $f \circ \varphi$ *de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* J*.*

Démonstration

Par récurrence. □

2 Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

a Fonctions continues pas morceaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a,b] \to E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f.
On note $\mathscr{C}_m([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Propriété : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ *et* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *base de* E*,* $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$*.* f *est continue par morceaux ssi pour tout* k*,* f_k *l'est.*

Corollaire : Opérations

Si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b],E)$*,* $\varphi \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $x \mapsto \|f(x)\|$*,* $f + \lambda g$ *et* $\phi \cdot f$ *sont continues par morceaux.*

Remarque

$\mathscr{C}_m([a,b],E)$ est un K-espace vectoriel.

Propriété

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur** I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.

b Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Propriété : Indépendance du choix de la base

Si $n = \dim E$ *et* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *base de* E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$. *Alors* $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k$ *ne dépend pas de la base* $\mathscr{B}$.

Démonstration

Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une autre base de E.

Alors, on peut décomposer tout $e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \varepsilon_j$.

Puis on décompose $f = \sum_{j=1}^{n} g_j \varepsilon_j = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} f_k \varepsilon_j$, donc pour tout j, $g_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} f_k$.

Alors $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} f_k(t) \right) \mathrm{d}t \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \varepsilon_j$. □

Définition : Intégrale sur un segment

Si $n = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ le vecteur $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k$.

On pose $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0_E$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété : Linéarité

$f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est une application linéaire de* $\mathscr{C}_m([a,b],E)$.

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. □

Propriété : Relation de Chasles

Si $f \in \mathscr{C}_m(I,E)$ *et* $a, b, c \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. □

c Sommes de Riemann

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision et pour tout k entre 0 et $n-1$, $\xi_k\in[a_k,a_{k+1}]$ alors on pose la somme de Riemann $R(f,\sigma,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(\xi_k)$.

Pour une fonction numérique, cela correspond à une somme d'aires de rectangles.

Si la subdivision est régulière, pour tout k, $a_{k+1}-a_k=\dfrac{b-a}{n}$ et pour tout k, $a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

On obtient alors $S(f,\sigma,\xi)=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)$.

Et si on prend les rectangles à gauche, on a alors $\xi_k=a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

Dans ce cas, $S(f,\sigma,\xi)=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Théorème

Si $f\in\mathscr{C}_m([a,b],E)$, $n\in\mathbb{N}^*$,

$$R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),$$

alors $R_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème vu en première année sur les fonctions numériques aux coordonnées dans une base. □

Théorème : Inégalité triangulaire intégrale

Si $f\in\mathscr{C}_m(I,E)$, $a,b\in I$, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left|\int_a^b\|f(t)\|\,\mathrm{d}t\right|$.
(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

Démonstration

Si $a=b$, il n'y a rien à faire.

Si $a<b$, et $n\in\mathbb{N}^*$, $\|S_n(f)\|\leqslant\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f(t)\|$ donc en faisant $n\to+\infty$, par continuité de la norme et $\|f\|$ étant continue par morceau, $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Si $a>b$, il suffit de remettre les bornes dans le bon sens. □

d Intégrale et primitive

Définition : Primitive

$g:I\to E$ est une **primitive** de $f:I\to E$ si g dérivable sur I et $g'=f$.

Propriété

$f:I\to E$ dérivable sur I est constante si et seulement si $f'\equiv 0_E$ sur I.

Démonstration

Si f est constante c'est la définition.
Si $f' \equiv 0$, alors, en passant par les coordonnées, f est constante. □

Remarque

La constante dépend de l'intervalle !

Propriété

*Soit $f : I \to E$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + C$.

Démonstration

$F' - G' \equiv 0$ sur l'intervalle I. □

Théorème : fondamental de l'analyse

Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans E et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Il suffit de passer par les coordonnées. □

Corollaire

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

(iii) Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $\displaystyle f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

*(iv) **Inégalité des accroissements finis** :*
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\|f'\| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

Démonstration

(ii) $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $F - F(a)$ sont deux primitives de f sur l'intervalle I s'annulant en a, donc sont égales.
(iii) f primitive de f'.
(iv) Si $x < y$, $\|f(x) - f(y)\| = \left\| \displaystyle\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant k|x - y|$. □

Propriété

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to E$ continue.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$.

Démonstration

Si F primitive de f, $\varphi = F \circ v - F \circ u$. □

e Intégration par parties

Propriété

Si $u \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$, $v \in \mathscr{C}^1(I, E)$,

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

$(uv)' = u'v + uv'$ puis intégrer entre a et b. □

f Changement de variable

Propriété

Si I *intervalle,* $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ *de classe* $\mathscr{C}^1$, $f \in \mathscr{C}(I, E)$, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u) \cdot f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u$.

Démonstration

Si F primitive de f, $(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f \circ \varphi$. □

3 Formules de Taylor

Définition

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

a Taylor reste intégrale

Théorème

Si f *est de classe* $\mathscr{C}^{n+1}(I, E)$, $a \in I$, *alors pour tout* $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

À connaître **PARFAITEMENT**.
Pour s'en rappeler : tester pour $n = 0$ et plus de a sous l'intégrale.

Démonstration

Par récurrence sur n.

- Si $n = 0$, $f \in \mathscr{C}^1(I)$, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si c'est vrai pour un $n \geqslant 0$, $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I)$, par hypothèse de récurrence, si $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence. □

b Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|.$$

Remarque

Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $p = 0$?

Démonstration

- Pas de problème si $x = a$.
- Si $x > a$, par Taylor reste intégrale, les bornes étant dans le bon sens,

$$\begin{aligned} \|R_n(x)\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^x \left\| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme $\left\| f^{(n+1)} \right\|$ est continue sur le segment $[a,x]$, ell est bornée donc $\sup\limits_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ existe et, tout étant positif et les bornes dans le bon sens toujours,

$$\|R_n(x)\| \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sup_{[a,x]} \left\| f^{(n+1)} \right\| \mathrm{d}t = \sup_{[a,x]} \left\| f^{(n+1)} \right\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,x]} \left\| f^{(n+1)} \right\|$$

- Si $x < a$,

$$\begin{aligned} \|R_n(x)\| &= \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \left| \int_a^x \left\| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{[x,a]} \left\| f^{(n+1)} \right\| \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,a]} \left\| f^{(n+1)} \right\|. \quad \square \end{aligned}$$

c Formule de Taylor-Young

Remarque

Ayant défini la négligeabilité, on peut, comme pour les fonctions numériques, calculer des développements limités vectoriels.

Propriété : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Démonstration

Soit $\varphi(h) = F(a+h) - F(a) - a_0 h - \dfrac{a_1}{2}h^2 - \cdots - \dfrac{a_n}{n+1}h^{n+1}$.

On veut montrer que $\varphi(h) = \mathrm{o}\left(h^{n+1}\right)$.

Or φ est dérivable sur I et $\varphi' : h \mapsto f(a+h) - a_0 - \cdots - a_n h^n = \mathrm{o}\left(h^n\right)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $|t| \leqslant \eta$, $\|\varphi'(t)\| \leqslant \varepsilon |t|^n$.

- En particulier, si $h \neq 0$ et $|h| \leqslant \eta$, alors $\|\varphi'(t)\| \leqslant \underbrace{\varepsilon|h|^n}_{\text{indépendant de } t}$ sur $]0;h[$.

  Par inégalité des accroissements finis, φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;h[$ en supposant de plus f continue, $\|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \|\varphi(h)\| \leqslant \varepsilon|h|^n |h-0| = \varepsilon|h|^{n+1}$.
  Notons que pour l'inégalité des accroissements finis vectorielle, nous avons besoin de la classe $\mathscr{C}^1$ de φ et donc la continuité de f (en fait f continue par morceaux suffit), mais elle est valable pour φ continue sur $[0,h]$ et dérivable sur $]0,h[$ (hors-programme pour une fonction vectorielle).
- Autre rédaction possible (demandant par contre forcément f au moins continue par morceaux), si $h > 0$, $\|\varphi(h)\| = \|\varphi(h) - \varphi(0)\| = \left\|\displaystyle\int_0^h \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \displaystyle\int_0^h \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^h \varepsilon|t|^n\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon|h|^{n+1}$.
  On peut faire un calcul semblable si $h < 0$ en renversant les bornes de l'intégrale.

Donc $\varphi(h) = \mathrm{o}\left(h^{n+1}\right)$. □

Remarque

⚠Comme pour les fonctions numériques, on peut aussi dériver un DL terme à terme **à condition de savoir que f' admet un DL.**

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to E$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

⚠*La réciproque est fausse : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

Remarque

L'hypothèse du programme officiel est f de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a.

Démonstration

On a déjà vu que c'est vrai pour $n=1$.
Si c'est vrai à l'ordre $n-1$, et si f admet une dérivée d'ordre $n \geqslant 1$ en a, alors f' admet une dérivée d'ordre $n-1$ en a et par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Alors, par primitivation de DL,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

ce qui établit la récurrence.
Pour la réciproque, si $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0, on a $f(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ qui est un DL_2 de f en 0 et pourtant $f' : x \mapsto 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon n'est pas dérivable en 0. □

II Séries vectorielles

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$., $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

1 Généralités

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.
Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in E$.
S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.
$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.
Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Propriété

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$ □

Propriété

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} (u_n + \lambda v_n) = S_n + \lambda \Sigma_n$. □

Propriété

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$.
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge.
Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right) e_k.$$

Démonstration

D'après la propriété connue sur les limites de suites vectorielles. □

Remarque

Lorsqu'il y a convergence, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$.

Propriété : Divergence grossière

*Si $u_n \not\to 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.*

⚠ La réciproque est fausse !

*Si $u_n \to 0_E$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si (S_n) converge, $u_n \to 0$.
Contre-exemple : série harmonique. □

2 Reste d'une série convergente

Définition

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$ *et* $\|R_n - S\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Démonstration

$S_N - S_n \to S - S_n = R_n$ lorsque $N \to +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ lorsque $N \to +\infty$ □

3 Convergence absolue

Définition

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème : En dimension finie, convergence absolue ⇒ convergence

Si E est de dimension finie et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fausse.

Démonstration

- **Cas où** $E = \mathbb{R}$: On écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

  Comme $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  Donc, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
- **Cas complexe** : $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent absolument car $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$ donc convergent.
- **Cas général** : Comme toutes les normes sont équivalentes, en considérant $\|\cdot\|_\infty$, on a $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \|\cdot\|$, on montre que chaque suite coordonnée de u est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour la réciproque fausse, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument. □

Remarque

Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Propriété

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

Démonstration

Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité triangulaire pour les sommes partielles, les deux séries convergeant bien. □

Remarque : Comparaison asymptotique pour les séries vectorielles

On compare $\|u_n\|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $\|u_n\| = \mathrm{o}(v_n)$ ou que $\|u_n\| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $\|u_n\| = \mathrm{o}(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

III Sommation des relations comparaison

1 Cas de divergence

Théorème

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.

Démonstration

Comme $\Sigma_n \to +\infty$, on a un rang N_0 à partir duquel $\Sigma_n > 0$.

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $\|u_n\| \leqslant M v_n$.
Si $n \geqslant N$, $\|S_n\| \leqslant \|S_N\| + M(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant \|S_N\| + M\Sigma_n$.
Or $\Sigma_n \to +\infty$, donc on a un rang N' tel que si $n \geqslant N'$, $\|S_N\| \leqslant \Sigma_n$.
Ainsi, pour $n \geqslant \max(N, N')$, $\|S_n\| \leqslant (M+1)\Sigma_n$ et $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $\|u_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$.
Si $n \geqslant N$, $\|S_n\| \leqslant \|S_N\| + \frac{\varepsilon}{2}(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant \|S_N\| + \frac{\varepsilon}{2}\Sigma_n$.
Si $n \geqslant \max(N, N_0)$, $\frac{\|S_n\|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Et enfin $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \to 0$ donc on a un rang N' à partir duquel $\frac{\|S_N\|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, si $n \geqslant \max(N, N_0, N')$, $\|S_N\| \leqslant \varepsilon\Sigma_n$ et $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$. Soit $T_n = S_n - \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \mathrm{o}(\Sigma_n)$ par (ii).
Donc $S_n \sim \Sigma_n$. □

Remarque

C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

2 Cas de convergence

Théorème

*Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

(iii) Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.

Remarque

C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Démonstration

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $\|u_n\| \leqslant M v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
Si $n, p \geqslant N$, $\left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k\| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{p} v_k$. Puis, en faisant $p \to +\infty$, $\|R_n\| \leqslant M\rho_n$ donc $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon>0$. On a un rang N à partir duquel $\|u_n\|\leqslant\varepsilon v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente. Avec le même calcul en remplaçant M par ε, si $n\geqslant N$, $\|R_n\|\leqslant\varepsilon\rho_n$ donc $R_n=\mathrm{o}(\rho_n)$.

(iii) Si $u_n\sim v_n$ alors $|u_n|\sim v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

$w_n=u_n-v_n=\mathrm{o}(v_n)$ donc $\sum w_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k-v_k)=\mathrm{o}(\rho_n)$.

Or, si $p\geqslant n$, $\sum_{k=n+1}^{p}(u_k-v_k)=\sum_{k=n+1}^{p}u_k-\sum_{k=n+1}^{p}v_k$ donc, en faisant $p\to+\infty$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k-v_k)=R_n-\rho_n=\mathrm{o}(\rho_n)$ et donc $R_n\sim\rho_n$. □

IV Suites et séries de fonctions vectorielles

$(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de E.

Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

1 Suites de fonctions

Définition : Convergence simple

Soit $f:A\to F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur A vers f** lorsque pour tout $x\in A$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall x\in A,\ \ \forall\varepsilon>0,\ \ \exists N_{x,\varepsilon}\in\mathbb{N},\ \ \forall n\geqslant N_{x,\varepsilon},\ \ \left\|f_n(x)-f(x)\right\|_F\leqslant\varepsilon.$$

Définition : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\ \ \forall x\in A,\ \ \left\|f_n(x)-f(x)\right\|_F\leqslant\varepsilon.$$

Remarque

Il y a convergence uniforme au voisinage de $x_0\in\overline{A}$ lorsqu'il existe $\eta>$ tel qu'il y ait convergence uniforme sur $A\cap B(x_0,\eta)$.

Théorème : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f:A\to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $x_0\in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0 (respectivement sur A).*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de chaque point de A).*

Alors

C1 *f est continue en x_0 (respectivement sur A).*

Théorème : de la double limite

Soit $f : A \to F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A, $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que

H1 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.

Alors on a $b \in F$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$.

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

Théorème : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$

alors

C1 f est continue sur $[a,b]$

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.

Théorème : Interversion limite et dérivée

Soient $f : I \to E$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.

H3 La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.

Alors

C1 f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

C2 $f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f'_n$.

C3 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^p$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.*

Alors

C1 *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.*

2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E^A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Définition

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
- **converge uniformément au voisinage de $a \in \overline{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A \cap B(a, r)$.**

On note, pour $f \in E^A$ bornée, $N_\infty(f) = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_E$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum N_\infty(f_n)$ converge.

Théorème : Continuité d'une série de fonctions vectorielles

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $a \in A$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en a (respectivement sur A).*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).*

Alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a (respectivement sur A).*

Corollaire

La somme d'une série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Démonstration

Les f_n sont continues et la convergence est uniforme au voisinage de chaque point de $D(0, R)$, car sur tout disque fermé inclus dans $D(0, R)$. □

Remarque

Il peut y avoir des discontinuités sur le cercle.
Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout sur le cercle.

Exemple

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$.

Théorème : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à E^A, $(b_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement infini si $F = \mathbb{R}$). On suppose que

- **H1** $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*
- **H2** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors

- **C1** $\sum b_n$ *converge.*
- **C2** $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x \to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$.

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $E^{[a,b]}$ tel que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

- **C1** $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a, b]$.*
- **C2** $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $a \in I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*
- **H2** *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- **C1** *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*
- **C2** *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E^I. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

V Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.

1 Définition

Définition

Une norme N sur une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{A}, +, \times, \cdot)$ est dite **sous-multiplicative** si pour tout $(a, b) \in \mathscr{A}^2$, $N(ab) \leqslant N(a)N(b)$. On parle aussi de **norme d'algèbre**.

Propriété

On a alors, pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N\left(a^k\right) \leqslant N(a)^k.$$

Démonstration

Récurrence immédiate. □

Corollaire

Soit $(\mathscr{A},+,\times,\cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie de N norme d'algèbre, et $a\in\mathscr{A}$.

(i) La série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.

(ii) Si $N(a)<1$, alors la série $\sum_{k\geqslant 0}a^k$ est absolument convergente.

Si e est le neutre de $\mathscr{A}$, on a alors $e-a$ inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty}a^k$.

Démonstration

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant N\left(\frac{a^k}{k!}\right)\leqslant\frac{N(a)^k}{k!}$ et $\sum_{k\geqslant 0}\frac{N(a)^k}{k!}$ converge comme série exponentielle réelle. □

Exercice : CCINP 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\,||$. On suppose que : $\forall(u,v)\in A^2$, $||u.v||\leqslant||u||.||v||$.

1. **Soit u un élément de A tel que $\|u\|<1$.**
   (a) **Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.**
   (b) **Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$.**
2. **Démontrer que, pour tout $u\in A$, la série $\sum\frac{u^n}{n!}$ converge.**

---

1. (a) Soit u un élément de A tel que $\|u\|<1$.
D'après les hypothèses, on a $||u^2||\leqslant||u||^2$.
On en déduit, par récurrence, que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \|u^n\|\leqslant\|u\|^n$.
Puisque $\|u\|<1$, la série numérique $\sum\|u\|^n$ est convergente et, par comparaison des séries à termes positifs, on peut affirmer que la série vectorielle $\sum u^n$ est absolument convergente.
Puisque l'algèbre A est de dimension finie, la série $\sum u^n$ converge.

(b) Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a $(e-u)\sum_{n=0}^{N}u^n=e-u^{N+1}$. (1)

L'application $\varphi:\begin{array}{ccc}A&\longrightarrow&A\\x&\longmapsto&(e-u)x\end{array}$ est linéaire.

Et, comme A est de dimension finie, on en déduit que φ est continue sur A.

Posons alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_N=\sum_{n=0}^{N}u^n$ et $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$.

$\lim_{N\to+\infty}S_N=S$ (d'après 1.a) et φ est continue sur A donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim_{N\to+\infty}\varphi(S_N)=\varphi(S)$.

C'est-à-dire $\lim_{N\to+\infty}(e-u)\sum_{n=0}^{N}u^n=(e-u)\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$. (2)

De plus, $\|u^{N+1}\|\leqslant\|u\|^{N+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Donc $\lim_{N\to+\infty}(e-u^{N+1})=e$. (3)

Ainsi, d'après (1), (2) et (3), on en déduit que : $(e-u)\sum_{n=0}^{+\infty}u^n=e$.

On prouve, de même, que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u^n\right)(e-u)=e$.

Et donc, $e-u$ est inversible avec $(e-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$.

2. On a $\left\|\frac{u^n}{n!}\right\|\leqslant\frac{\|u\|^n}{n!}$. De plus, la série exponentielle $\sum\frac{\|u\|^n}{n!}$ converge.

Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série vectorielle $\sum\frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente, car A est de dimension finie.

Remarque

Si $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur E, on pose, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $N(u) = \sup\limits_{x \in E\setminus\{0_E\}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ (bien définie par continuité de u, et on peut se restraindre au compact $S(0_E, 1)$ en dimension finie pour voir que ce $\sup$ est attient.)

N est appelée **norme subordonnée à** $\|\cdot\|$ et on vérifie qu'il s'agit d'une norme d'algèbre sur $(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$.

C'est un bon exercice (bien classique !) de le démontrer.

La version matricielle a été étudiée dans le TD sur la compacité.

On a aussi que $n\|\cdot\|_\infty$ est une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{u^k}{k!}$ est absolument convergente.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

Définition : Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $\exp u = \mathrm{e}^u = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k}{k!}$.

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\exp A = \mathrm{e}^A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

2 Propriétés

Propriété

Si A matrice représentant $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\exp A$ représente $\exp u$ dans la même base.

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^k\right) = A^k$ donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\sum\limits_{k=0}^{N} u^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{N} A^k$ et comme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u$ est linéaire en dimension finie (celle de $\mathscr{L}(E)$ suffit), elle est continue, donc avec $N \to +\infty$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp u) = \exp A$. □

Remarque

Ainsi, via l'isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $u \in \mathscr{L}(E) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés de $\exp$ pour les matrices ou les endomorphismes sont semblables.

Propriété

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) Si $u \circ v = v \circ u$, $\exp(u) \circ v = v \circ \exp(u)$.

(ii) Si $u \circ v = v \circ u$,

$$\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u).$$

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(t\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{id}_E$.

(iv) $\exp(0) = \mathrm{id}_E$.

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si $AB = BA$, $\exp(A)B = B\exp(A)$.

(ii) Si $AB = BA$,

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(tI_n) = \mathrm{e}^t I_n$.

(iv) $\exp(0_n) = I_n$.

Démonstration

(i) Si $AB = BA$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} A^k\right) B = B \sum\limits_{k=0}^{N} A^k$, d'où le résultat par linéarité donc continuité de $M \mapsto MB$ et

$M \mapsto BM$.

(ii) Il suffit d'appliquer (i) deux fois !

(iii) $\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} I_n = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!} \right) I_n$ puis $N \to +\infty$ avec un argument de continuité.

(iv) $\exp(0_n) = I_n$: immédiat par définition. □

Propriété

Les applications $\exp : \begin{array}{|ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ u & \longmapsto & \exp u \end{array}$ *et* $\exp : \begin{array}{|ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \exp A \end{array}$ *sont continues.*

Démonstration

C'est une série entière... vectorielle ! N norme sous-multiplicative. Les fonctions $f_k : A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a convergence normale de $\sum f_k$ sur toute boule fermée centrée en 0_n pour N norme sous-multiplicative. En effet, dans une telle boule de rayon $r > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N(f_k(A)) \leqslant \frac{r^k}{k!}$, indépendant de A, terme général d'une série (exponentielle) convergente.

Donc on a convergence uniforme au voisinage de chaque matrice A, donc $\exp$ est bien continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. □

Propriété

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Les applications $\phi : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(tu) \end{array}$ *et* $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}$ *sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\phi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$$

$$\varphi'(t) = A \times \exp(tA) = \exp(tA) \times A.$$

Démonstration

C'est une série entière... vectorielle ! N norme sous-multiplicative.

- Les fonctions $g_k : t \mapsto \frac{t^k A^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $\sum g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- On montrer que $\sum g_k'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de la forme $[-M, M]$.

  En effet, si $t \in [-M, M]$, $k \geqslant 1$ $N(g_k'(t)) = N\left(\frac{t^{k-1} a^k}{(k-1)!}\right) \leqslant \frac{M^{k-1} N(A)^k}{(k-1)!}$ indépendant de A, terme général d'une série (presque exponentielle) convergente.

Donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$. □

Propriété

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u + v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A + B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

Démonstration : Non exigible

1re solution : c'est un produit de Cauchy. Problème : au programme, seul le produit de Cauchy sur $\mathbb{C}$
Autre solution : C'est un... problème de Cauchy ! Soit $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi_1 : t \mapsto \exp(t(A+B))E_1$.
Alors $\phi_1' : t \mapsto (A+B)\phi_1(t)$ donc Φ_1 est solution du problème de Cauchy $X' = (A+B)X$ et $X(0) = E_1$.
Puis $\Psi_1 : t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)E_1$ est tel que $\psi_1' : t \mapsto (A+B)\psi_1(t)$ et $\Psi_1(0) = E_1$.
Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (ici la matrice, $A+B$, est constante donc continue), $\Phi_1 = \Psi_1$.
Cela signifie que la première colonne de $\exp(t(A+B))$ est égale à la première colonne de $\exp(tA)\exp(tB)$.
En réitérant sur les autres vecteurs de la bases canonique, on obtient $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$.
L'évaluation en $t=1$ permet de conclure. □

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp(u) \in \mathcal{GL}(E) \quad \text{et} \quad \exp(u)^{-1} = \exp(-u)$$
$$\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

Démonstration

$\exp(A-A) = I_n$ □

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors
$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P.$$

Démonstration

A et $B = P^{-1}AP$ représentent un même endomorphisme u dans des bases différentes. $\exp(B)$ et $\exp(A)$ représentent $\exp(u)$ et la formule de changement de base donne $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$. □

Propriété

- $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- *Si N est nilpotente d'indice p,*
$$\exp N = I_n + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}.$$

Exemples

E 1 – Exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut déterminer $\exp A$ soit en diagonalisant, soit en cherchant le polynôme annulateur pour trouver les puissances de A.

En effet, On vérifie que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\exp A = P(\exp D)P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2}+4\mathrm{e}^{3} & -4\mathrm{e}^{-2}+4\mathrm{e}^{3} \\ -\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{3} & 4\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{3} \end{pmatrix}$ après calculs.

Deuxième méthode $P = (X+2)(X+3)$ est à la fois le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A, et en est un polynôme annulateur. Division euclidienne : $X^k = P \times Q_k + R_k$ où $R_k = a_kX + b_k$ se trouve en évaluant en -2 et 3, avec $A^k = R_k(A) = a_kA + b_kI_2$.

En remplaçant dans la définition de $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, on retrouve l'expression.

E2 – Exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 2.

Comme elles commutent, $\exp A = \exp I_2 \exp N = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}(I_2 + N) = \begin{pmatrix} e & -e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

Méthode : Avec une matrice nilpotente

Plus généralement, si on a N nilpotente et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n + N$, le calcul de $\exp A$ est facile.

C'est le cas lorsque A a une unique valeur propre λ, alors $\chi_A = (X-\lambda)^n$ est un polynôme annulateur par Cayley-Hamilton, donc $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.

Plus généralement, un résultat du programme montre que dans une base adaptée, on a une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ ou pour tout i, $A_i = \lambda_i I + N_i$ avec N_i nilpotente.

On vérifie facilement que l'exponentielle de cette matrice est $\begin{pmatrix} \exp A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_p \end{pmatrix}$.