chapitreXXV

Variables aléatoires discrètes

Extrait du programme officiel :

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.

La notion de variable à densité est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
d) Variables aléatoires discrètes	
Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.
e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.	Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.	
Couple de variables aléatoires indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
f) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p.	Notation $\mathscr{G}(p)$.
La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$	Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathscr{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$	⇆ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Espérance	
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(P(X=x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$.	Notation $\mathrm{E}(X)$. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.	
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X=x)\ f(x)\big)$ est sommable ; si tel est le cas : $$\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\ P(X=x).$$	Démonstration non exigible.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	
h) Variance, écart type et covariance	
Moments.	
Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	
Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.	
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. ⇆ PC : écart quadratique énergétique.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Covariance de deux variables aléatoires.	
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	
i) Loi faible des grands nombres	
Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$, on a, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon>0$, l'inégalité : $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ où σ est la variance commune des X_k. ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.
j) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\ t^k.$$	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.

Contenus	Capacités & Commentaires
Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X{}'(1)$. La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X{}'(1)$ et $G_X{}''(1)$. Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Table des matières

I Variables aléatoires discrètes

On se donne une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1 Définition

Définition : Variable aléatoire discrète

Soit E un ensemble quelconque. Une application $X : \Omega \to E$ est appelée **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ lorsqu'elle vérifie

(i) $X(\Omega) = \operatorname{Im} X = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} \in \mathscr{P}(E)$ est fini ou dénombrable.

(ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$ et est noté $(X = x)$.

Elle est dite **réelle** lorsque $E \subset \mathbb{R}$.

Remarques

R 1 – La notation $(X = x)$ est un peu déroutante, cela revient par exemple à noter $\pi\mathbb{Z} = \sin^{-1}(\{0\}) = (\sin = 0)$.
Si A est une partie de E, on note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.

R 2 – On note aussi, pour une variable aléatoire réelle,

$$(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}$$

et on introduit de la même façon, $(X < x)$, $(X \geqslant x)$, $(X > x)$.

R 3 – Enfin, si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, on note $f(X)$ la fonction $f \circ X$. Est-ce une variable aléatoire ? Oui. Voir ci-après.

R 4 – La deuxième condition est là pour qu'on puisse calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
Si $x \in E \setminus X(\Omega)$, $(X = x) = \varnothing \in \mathscr{A}$ également.

R 5 – On ne demande pas que E soit fini ou dénombrable, seulement que $X(\Omega)$ le soit : si des valeurs de E ne sont pas atteintes, on peut s'en débarrasser.
On ne demande pas non plus que l'univers Ω soit fini ou dénombrable.

R 6 – Lorsque l'univers est fini ou dénombrable, on choisit $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et toute fonction de Ω dans E est une variable aléatoire discrète.

Exemple : fondamental

Si F événement de l'univers Ω, alors

$$\mathbb{1}_F : \left| \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in F \\ 0 & \text{si } \omega \notin F \end{cases} \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire.
$\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 1) = \mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{F}\right)$.

Définition - Propriété

$\big((X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements adapté à X.**

Remarque

On peut remplacer $X(\Omega)$ par E, ce qui revient à ajouter des ensembles vides.

Démonstration

Les $(X=x)$ sont deux à deux disjoints de réunion Ω. □

Propriété : Les parties de $X(\Omega)$ sont des événements

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. Alors pour toute partie A de $X(\Omega)$, $(X\in A)\in\mathscr{A}$.

Démonstration

A est finie ou dénombrable et $A=\bigsqcup_{x\in A}\{x\}$ donc $(X\in A)=\bigsqcup_{x\in A}(X=x)\in\mathscr{A}$. □

Propriété : Une fonction d'une v.a.d. est une v.a.d.

Si $X\ :\ \Omega\to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f\ :\ E\to F$ est une fonction (ou application) quelconque, alors $f\circ X$, notée $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

On a bien que $f(X):\Omega\to F$ avec $f(X)(\Omega)=f(X(\Omega))$ fini ou dénombrable et si $y\in f(X)(\Omega)$,

$$(f(X)=y)=\{\omega\in\Omega,\ f(X(\omega))=y\}=\left\{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\in f^{-1}(\{y\})\right\}=\left(X\in f^{-1}(\{y\})\right)\in\mathscr{A}.$$ □

2 Loi

On fixe X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.

Définition : Loi d'une v.a.d.

L'application

$$\mathbb{P}_X:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X\in A)\end{array}\right.$$

est appelée **loi de X.**

Propriété

$\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $\big(X(\Omega),\mathscr{P}(X(\Omega))\big)$.

Remarque

Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, il n'est pas choquant de choisir $\mathscr{P}(X(\Omega))$ comme tribu.

Démonstration

On revient à la définition :
- Pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$
- $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- σ-**additivité** : Si $(A_n)_n$ est suite de parties deux à deux disjointes de $X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (X \in A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_X(A_n)$$ □

Propriété

Si $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}_X(\{a\}) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a)$.

Démonstration

Il suffit de décomposer dans le s.c.e adapté à X. □

Corollaire

La loi de X est uniquement déterminée par la donnée de $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$, famille sommable de réels dans $[0,1]$ de somme 1.

Remarque

Ainsi, pour décrire la loi d'une variable aléatoire, on se contente de préciser $X(\Omega)$ et les $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
On note parfois $\mathbb{P}_X = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\delta_x$ où $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
On verra plus loin les lois usuelles à connaître parfaitement.

Notation

Si X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.
Si X suit une loi $\mathscr{L}$, on note $X \sim \mathscr{L}$ (programme de MP) ou $X \hookrightarrow \mathscr{L}$ (programme de PSI et PC).

Exercice : CCINP 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. **Déterminer la loi de X.**
2. **Déterminer la loi de Y.**

---

1. $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
   $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
   $\forall\, i \in [\![1,2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
   On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
   Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc card$(\Omega) = (n+2)!$.

   $(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
   On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
   Donc $P(X = 1) = \dfrac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n}{n+2}$.

   $(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
   On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.

Donc $P(X=2)=\dfrac{2\times n\times (n)!}{(n+2)!}=\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.

$(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
Donc $P(X=3)=\dfrac{2\times 1\times (n)!}{(n+2)!}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.
$X(\Omega)=[\![1,3]\!]$.

$(X=1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
Donc $P(X=1)=\dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}}=\dfrac{n}{n+2}$.

$(X=2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
D'où $P(X=2)=\dfrac{2}{n+2}\times\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

$(X=3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
D'où $P(X=3)=\dfrac{2}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{n}{n}=\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2. $Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$.
Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$.
L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

Donc $P(Y=k)=\dfrac{\dbinom{n}{k-1}\times(k-1)!\times 2\times(n+2-k)!}{(n+2)!}=\dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times(n+2-k)!}{(n+2)!}$

Donc $P(Y=k)=\dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
$Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$.

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$.
On a : $(Y=k)=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{k-1}\cap\overline{A_k}$.

Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y=k)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.

$P(Y=k)=\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{(n+2)-1}\times\dfrac{n-2}{(n+2)-2}\times\dots\times\dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)}\times\dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$

$P(Y=k)=\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{n+1}\times\dfrac{n-2}{n}\times\dots\times\dfrac{n-k+2}{n-k+4}\times\dfrac{2}{n-k+3}$.

$P(Y=k)=2\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times\dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.

$P(Y=k)=\dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

Exercice : CCINP 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. **Préciser les valeurs prises par X.**
2. **(a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.**

   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. **(a) Calculer $E(X)$.**

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

---

1. $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
2. (a) Pour que l'événement $(X=2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

   De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.

   Donc $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   (b) Déterminons $P(X=1)$.

   Pour que l'événement $(X=1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide.
   Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».

   Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b».

   On a alors $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$.

   On a $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(A_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   Donc $P(X=1) = \binom{3}{1}P(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.

   Donc $P(X=1) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

   Donc $P(X=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

   Enfin, $P(X=0) = 1 - P(X=2) - P(X=1)$ donc $P(X=0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

   Donc $P(X=0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-1)$.

Autre méthode :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons Ω l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega = 3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω.

(a) L'événement $(X=2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.
Donc $P(X=2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X=1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc 2^n-2 applications.
D'où $P(X=1)=\dfrac{3\times(2^n-2)}{3^n}=\dfrac{1}{3^{n-1}}(2^n-2)$.

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Donc $E(X)=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

(b) D'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$.
Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

Propriété

La loi de $Y=f(X)$ est donnée par $\forall\, y\in f(X(\Omega))$,

$$\mathbb{P}(Y=y)=\mathbb{P}(f(X)=y)=\mathbb{P}\left(X\in f^{-1}(\{y\})\right)=\sum_{x\ \mid\ f(x)=y}\mathbb{P}(X=x).$$

De la même manière, on obtient par exemple :

Propriété

Si X et Y sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X+Y=z)=\sum_{x,y\ \mid\ x+y=z}\mathbb{P}\big(X=x,Y=y\big)$$

$$\text{et}\quad \mathbb{P}(XY=z)=\sum_{x,y\ \mid\ xy=z}\mathbb{P}\big(X=x,Y=y\big)$$

II Familles de variables aléatoires

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ espace probabilisé.

1 Définition et lois

a Couple de variables aléatoires discrètes

Définition - Propriété

Soit X,Y variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E,E'. L'application

$$Z:\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & E\times E'\\ \omega & \longmapsto & (X(\omega),Y(\omega))\end{array}\right.$$

est une variable aléatoire discrète appelée **couple** $Z=(X,Y)$.

Remarques

R 1 – $(X,Y)(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et il n'y a pas égalité en général.

R 2 – On note indifféremment $((X,Y)=(x,y))$ ou $(X=x)\cap(Y=y)$ ou $(X=x \text{ et } X=y)$ ou $(X=x,Y=y)$ ces événements.

Démonstration

$Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Pour tout $(x,y) \in Z(\Omega)$, $(Z = (x,y)) = (X = x) \cap (Y = y) \in \mathscr{A}$. □

Propriété

*Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors la famille d'événements $\big(((X,Y) = (x,y))\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple** (X,Y).*

Démonstration

Les événements sont bien disjoints deux à deux et

$$\bigcup_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \big((X=x)\cap(Y=y)\big) = \Omega$$

car tout $\omega \in (X = X(\omega)) \cap (Y = Y(\omega))$. □

Remarque

On sait donc que

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, le « couple »

$$(X,Y)\ :\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

  est une variable aléatoire discrète.
- Si $Z\ :\ \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f\ :\ E \to F$ est une fonction quelconque, alors $f \circ Z$, notée $f(Z)$ est une variable aléatoire discrète.

Et constatons que donc, si X et Y sont des variables aléatoires discrètes réelles définies sur un même univers probabilisé, alors $X+Y$, XY, $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes.

Bien sûr, il y aussi $\Gamma\left(\operatorname{Arctan}\left(1+X^2+Y^2\right)\right)$, mais on n'a cité que quelques exemples fréquemment utiles.

Mais il n'est pas inutile de savoir montrer directement que ces choses ($X+Y$ par exemple) sont bien des variables aléatoires…Allons-y pour $X+Y$.

Pour calculer les lois :

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{x,y\ \mid\ x+y=z} \mathbb{P}\big(X=x, Y=y\big)$$

$$\text{et}\quad \mathbb{P}(XY=z) = \sum_{x,y\ \mid\ xy=z} \mathbb{P}\big(X=x, Y=y\big)$$

b Loi conjointe

Définition : Loi conjointe

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires discrètes. On appelle **loi conjointe** de (X,Y) la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X,Y).

Remarque

Vu la propriété précédente, cette loi est déterminée par $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ pour $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$. Lorsque les variables aléatoires sont finies, cette loi peut être représentée dans un tableau à double entrée.

Exemple

On lance deux dés, X est la v.a. égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit. On pose $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On obtient :

X \ Y	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/18	1/36	0	0	0	0	1/12
3	1/18	1/18	1/36	0	0	0	5/36
4	1/18	1/18	1/18	1/36	0	0	7/36
5	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	0	9/36
6	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	11/36
loi de Y	11/36	9/12	7/36	5/36	3/36	1/36	(1)

Remarquons qu'on obtient la loi de X en sommant les lignes et celle de Y en sommant les colonnes.

c Lois marginales

Définition : Lois marginales

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, les lois de X et de Y sont appelées **première et seconde lois marginales du couple.**

Propriété

La loi conjointe de (X, Y) détermine les lois marginales de (X, Y) mais la réciproque est fausse.

Démonstration

$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_y ((X, Y) = (x, y))\right) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Idem pour Y.

Contre-exemple :

X \ Y	0	1	loi de X
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
loi de Y	1/2	1/2	(1)

X \ Y	0	1	loi de X
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
loi de Y	1/2	1/2	(1)

□

d Lois conditionnelles

Définition : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$ est la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}$. Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

Remarque

Les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$ et la loi de X permettent de déterminer la loi conjointe de (X, Y) :
- Soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et alors $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \leqslant \mathbb{P}(X = x) = 0$ donc $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$,
- soit $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x).$$

Exemple

Lois conditionnelles de Y :

X \ Y	0	1
0	1/4	3/4
1	2/3	1/3

Loi conjointe de (X, Y) :

X \ Y	0	1	loi de X
0	1/10	3/10	2/5
1	2/5	1/5	3/5
loi de Y	1/2	1/2	(1)

2 Extension aux n-uplets

Définition : n-uplets de variables aléatoires

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes. C'est encore une variable aléatoire discrète appelé **vecteur aléatoire discret** de dimension n.

La **loi conjointe** de $(X_1,\dots,X_n)$ est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n)$ où pour tout i, $x_i \in X_i(\Omega)$.

Les lois de $X_1,\dots,X_n$ sont les **lois marginales** de $(X_1,\dots,X_n)$.

Définition : Loi conditionnelle pour n variables

Si $x_1,\dots,x_{n-1}$ sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de X_n sachant $(X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout x_n.

Remarque

Lorsque l'on a la propriété

$$\mathbb{P}\left(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_1 = x_1,\dots,X_i = x_i\right) = \mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)$$

(phénomène sans mémoire), on dit que la famille $(X_1,\dots X_n)$ de variables aléatoires est **markovienne**.

3 Indépendance

a Cas d'un couple de variable

Définition : Indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\ \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note parfois $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\ \mathbb{P}(Y = y).$$

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ est direct.
On suppose que pour tout $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$.
Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x,y)\in A\times B} (X=x, Y=y)\right) = \sum_{(x,y)\in A\times B} \mathbb{P}(X=x,Y=y) = \sum_{x\in A}\mathbb{P}(X=x)\sum_{y\in B}\mathbb{P}(Y=y).$$

□

Remarque

Si X et Y sont indépendantes, la donnée des lois marginales de (X,Y) détermine sa loi conjointe.

Propriété

Soit (X,Y) couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

(i) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(ii) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y)>0$, la loi de X sachant $(Y=y)$ est la même que la loi de X.

(iii) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X=x)>0$, la loi de Y sachant $(X=x)$ est la même que la loi de Y.

Démonstration

Immédiat. □

Propriété

Si X,Y sont des variables aléatoires indépendantes, f,g définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration

$(f(X)\in A) = \left(X \in f^{-1}(A)\right)$ et $(g(Y)\in B) = \left(Y \in f^{-1}(B)\right)$, ces derniers étant indépendants. □

Exemple

Si X et Y sont indépendantes, pour tous m,n, X^m et Y^n le sont.

Remarque

En reprenant un calcul précédent, on obtient, si X,Y indépendantes, $\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{x,y \mid x+y=z} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$ où l'on peut remplacer $X+Y$ par n'importe quelle fonction de X et Y.

b Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition

Des variables aléatoires discrètes $X_1,\dots,X_n$ sont dites **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$, ..., A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1)$, ..., $(X_n \in A_n)$ le sont.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes est une suite de variables aléatoire (mutuellement) indépendantes lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_,\dots,X_n$ le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaiid).

Propriété

$X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1=x_1)$, …, $(X_n=x_n)$ le sont.

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ est direct.

L'autre sens est similaire au cas des couples de variables aléatoires : on suppose que pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in A_1\times\cdots\times A_n$, les événements $(X_1=x_1)$, …, $(X_n=x_n)$ sont indépendants.

Soit $(A_1,\dots,A_n)\in\mathscr{P}(X_1(\Omega))\times\cdots\times\mathscr{P}(X_n(\Omega))$, $I\subset[\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i\in A_i)\right)&=\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x_i)_i\in\prod\limits_{i\in I}A_i}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i=x_i)\right)\right)\\&=\sum_{(x_i)_i\in\prod\limits_{i\in I}A_i}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i=x_i)\right)=\sum_{(x_i)_i\in\prod\limits_{i\in I}A_i}\left(\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=x_i)\right)\\&=\prod_{i\in I}\left(\sum_{x_i\in A_i}\mathbb{P}(X_i=x_i)\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i\in A_i).\quad\square\end{aligned}$$

Remarques

R 1 – n expériences aléatoires indépendantes peuvent être modélisées par n variables aléatoires indépendantes. Le résultat de la i^{e} expérience est noté X_i et

$$\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_1=x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n=x_n).$$

R 2 – Comme pour les événements, mutuellement indépendants $\Rightarrow$ indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse si $n>2$.

Exemple

Si X_1,X_2 vaiid finies de loi uniforme $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$. $X_3=X_1\times X_2$.

$$\mathbb{P}(X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)+\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{2}$$

Donc $X_3\hookrightarrow\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$.

Alors X_1,X_2,X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1\perp\!\!\!\perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=-1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

Donc $X_1\perp\!\!\!\perp X_3$ et par symétrie, $X_2\perp\!\!\!\perp X_3$.

Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}.$$

Propriété

Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, $f_1,\dots,f_n$ définies sur $X_1(\Omega),\dots,X_n(\Omega)$, alors $f_1(X_1),\dots,f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration

Similaire au cas de deux variables : $\left(f(X_i)\in B_i\right)=\left(X_i\in f^{-1}(B_i)\right)$. □

Propriété : Lemme des coalitions

Soit $n,m\in\mathbb{N}$ tels que $0<m<n$, $X_1,\dots,X_m,\dots,X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, f définie sur $X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega)$ et g définie sur $X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$.

Alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration : Non exigible

Mais pas difficile, il suffit de remarquer que les variables aléatoires $Y=(X_1,\dots,X_m)$ et $Z=(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes (ce qui ne pose pas vraiment de problème : il suffit de l'écrire) et d'appliquer la propriété précédente. □

Théorème

Soit $(\mathscr{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n\hookrightarrow\mathscr{L}_n$.

Exemple

Un jeu de pile ou face infini se modélise (naturellement) par une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Démonstration : Admise

□

III Lois usuelles

1 Loi Uniforme

Définition : Loi uniforme

On dit que qu'une variable aléatoire **finie** X suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x\in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\})=\mathbb{P}(X=x)=\frac{1}{n}$$

où $n=|X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A\subset X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(A)=\dfrac{|A|}{n}$.

On note alors $X\sim\mathscr{U}(n)$ ou $X\hookrightarrow\mathscr{U}(n)$.

Exemple

Si on tire un dé à n faces ou si on tire une boule dans une urne qui en contient n (numérotée), alors la variable aléatoire du résultat suit $\mathscr{U}(n)$.

Remarque

⚠ cela ne concerne pas de la probabilité $\mathbb{P}$ initiale : $\mathbb{P}_X$ peut être uniforme sans que $\mathbb{P}$ le soit.

Si, par exemple, on lance un dé à 6 faces truqué tel que l'on obtient 1 ou 6 avec une probabilité $1/4$ et $2,3,4$ ou 5 avec probabilité $1/8$, X variable aléatoire $\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}$, alors $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=1/2$ donc $X\hookrightarrow\mathscr{U}(2)$ alors que $\mathbb{P}$ n'est pas la probabilité uniforme.

On a donc $\mathbb{P}_X=\sum_{x\in X(\Omega)}\dfrac{\delta_x}{n}$.

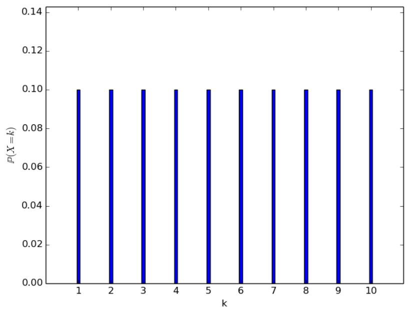

Figure 1 – Loi $\mathscr{U}(10)$ sur $[\![1,10]\!]$

2 Loi de Bernoulli

Définition : Loi de Bernoulli

On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0,1]$ lorsque X est à valeurs dans $E = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = q = 1-p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple : Situation type

Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

Remarque

$\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$.

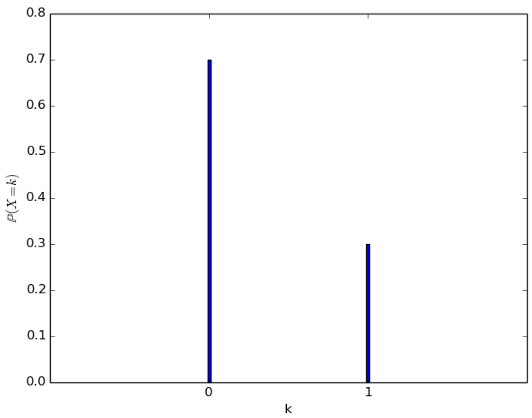

Figure 2 – Loi $\mathscr{B}(0,3)$

Propriété

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sont exactement les fonctions indicatrices des parties F de Ω telles que $\mathbb{P}(F) = p$.

Démonstration

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors si $F = (X=1)$, $X = \mathbb{1}_F$.
Réciproquement, si $X = \mathbb{1}_F$, $X(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(F)$. $\square$

Remarques

R 1 – Deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si $(X=1)$ et $(Y=1)$ le sont.

R 2 – Si X prend deux valeurs a et b distinctes, alors $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X=b)$.
Autrement dit, $X = a + (b-a)Y$ où Y suit une loi de Bernoulli.

3 Loi binomiale

On a déjà vu que lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, la probabilité d'avoir $k \leqslant n$ succès s'écrit $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où p est la probabilité d'un succès.

Si on appelle X la variable aléatoire du nombre de succès, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, alors elle suit la loi donnée par

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarquons que l'on peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ où X_i est la variable aléatoire de Bernoulli succès à la i^{e} répétition.

Définition : Loi binomiale

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** (n,p) **où** $p \in [0,1]$ lorsque X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $q = 1-p$. On note alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple : Situation type

Nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.

Remarques

R1 – $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$.

R2 – $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

R3 – La formule du binôme redonne (ou se retrouve par) $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

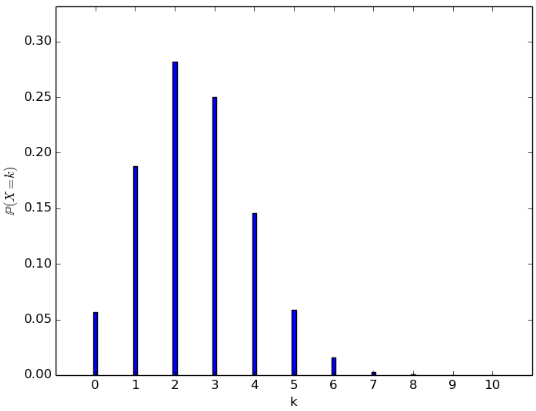

Figure 3 – Loi $\mathscr{B}(10, 1/4)$

Exercice

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $Y = n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,q)$.

4 Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$.

On lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec probabilité p. Les lancers sont indépendants.

Soit X_n la variable aléatoire du succès au n^{e} lancer : elle vaut 1 si c'est pile, et 0 sinon.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de vadiid, toutes de loi $\mathscr{B}(p)$.

Soit X la variable aléatoire du rang du premier succès : pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) = 1\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $(X > n) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)$, donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n.$$

- $(X = n) = (X_n = 1) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = 0)$, donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

- En passant au contraire,

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - (1-p)^n.$$

- Soit A l'événement « N'obtenir que des faces », et $A_n = (X > n)$.
  Alors (A_n) est décroissante et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

  Par continuité décroissante,
$$\mathbb{P}(A_n) = (1-p)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(A) = 0.$$

Définition : Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Remarques

R 1 – Première loi dénombrable du programme. On vérifie bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

R 2 – De nouveau, on calcule (à savoir faire !)

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} (x = k)\right) = \cdots = (1-p)^n.$$

Exemple : Situation type

Le rang du premier succès dans une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit $\mathcal{G}(p)$.

5 Loi de Poisson

Définition : Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque

On vérifie bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

6 Propriétés des lois usuelles

a Somme de n vaiid de Bernoulli

Propriété : Importante !

Si $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$, alors
$$X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Démonstration

$$\mathbb{P}(X_1+\ldots+X_n=k)=\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\{0,1\}\\ x_1+\cdots+x_n=k}}\mathbb{P}(X_1=x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n=x_n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

□

Remarque

Plus généralement, si les X_i indépendantes suivent $\mathscr{B}(n_i,p)$, alors $X_1+\cdots+X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(\sum n_i,p)$.

b Variables aléatoires sans mémoire et loi géométrique

Définition : Variable aléatoire sans mémoire

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire lorsque

$$\forall\,(n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad \mathbb{P}(X>n+k|X>n)=\mathbb{P}(X>k)$$

avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>n)\neq 0$.

Propriété : Caractérisation des lois géométriques

Les variables aléatoires X sans mémoire sont exactement les variables aléatoires suivant une loi géométrique, de paramètre $p=\mathbb{P}(X=1)$.

Démonstration

Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $p=\mathbb{P}(X=1)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, si $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>n)=(1-p)^n$ d'après un calcul ci-dessus et

$$\mathbb{P}(X>n+k|X>n)=\frac{\mathbb{P}(X>n+k\text{ et }X>n)}{\mathbb{P}(X>n)}=\frac{\mathbb{P}(X>n+k)}{\mathbb{P}(X>n)}=(1-p)^k=\mathbb{P}(X>k).$$

Réciproquement, si X est sans mémoire, en prenant $k=1$, on obtient

$$\mathbb{P}(X>n+1)=\mathbb{P}(X>n+1|X>n)\mathbb{P}(X>n)=\mathbb{P}(X>1)\mathbb{P}(X>n).$$

On a donc une suite géométrique et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>n)=(\mathbb{P}(X>1))^n$.

Or, avec $p=\mathbb{P}(X=1)=1-\mathbb{P}(X>1)$, donc $\mathbb{P}(X>n)=(1-p)^n$.

Et, enfin, $\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X>n-1)-\mathbb{P}(X>n)=(1-p)^{n-1}-(1-p)^n=p(1-p)^{n-1}$: on a bien une loi géométrique à condition que $p\in]0,1[$.

Or $p=\mathbb{P}(X=1)=1-\mathbb{P}(X>1)<1$ et $\mathbb{P}(X>0)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}>0$ donc $p\neq 0$. □

c Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

Propriété

Soit $\lambda>0$, $(p_n)_n\in]0,1[^{\mathbb{N}}$ tel que $np_n\to\lambda$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles.
On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p_n)$.
Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Remarque

Une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ (qui peut être vue comme nombre de succès dans la répétition de n épreuve de Bernoulli avec probabilité p de succès) peut donc être approchée par une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda=np$ à condition que n soit grand et $p=\dfrac{\lambda}{n}$ soit petit.

La loi de Poisson est qualifiée de **loi des événements rares**.

Démonstration

On vérifie que lorsque $n \to +\infty$, $\mathbb{P}(X_n = k) \sim \dfrac{(np_n)^k(1-p_n)^n}{k!(1-p_n)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. □

7 Exercices CCINP

Exercice : CCINP 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. **Donner la loi de X. Justifier.**
2. **La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.**
   (a) **Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.**
   (b) **Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.**
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) **Déterminer l'espérance et la variance de Z.**

---

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n, p).
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.
2. (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

   $$P(Y = k|X = i) = \left\{ \binom{n-i}{k} p^k(1-p)^{n-i-k} \text{ si } k \in [\![0, n-i]\!] 0 \text{ sinon} \right.$$

   (b) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y = k-i|X = i)P(X = i)$.

   Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k(1-p)^{2n-k-i}$.

   Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

   Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k}(p(2-p))^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

   On vérifie que $1-p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :

   Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

   Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :
   $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \dfrac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}\dfrac{n!}{i!(n-i)!} = \dfrac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!} = \dfrac{k!}{(k-i)!i!}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors, $E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\left(1-p(2-p)\right) = np(2-p)(p-1)^2$.

Exercice : CCINP 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. **Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.**
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) **Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.**
   (b) **Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.**
2. **Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.**
   (a) **Déterminer la loi de X.**
   (b) **Déterminer la loi de Y.**

---

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
   Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
   Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$).
   La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5,\frac{1}{5})$.

   C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,5]\!]$ et : $\forall\, k\in[\![0,5]\!],\ P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.

   Donc, d'après le cours, $E(X)=5\times\frac{1}{5}=1$ et $V(X)=5\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}=0,8$.

   (b) D'après les hypothèses, on a $Y=2X-3(5-X)$, c'est-à-dire $Y=5X-15$.
   On en déduit que $Y(\Omega)=\{5k-15 \text{ avec } k\in[\![0,5]\!]\}$.
   Et on a $\forall\, k\in[\![0,5]\!],\ P(Y=5k-15)=P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.

   $Y=5X-15$, donc $E(Y)=5E(X)-15=5-15=-10$.

   De même, $Y=5X-15$, donc $V(Y)=25V(X)=25\times\frac{4}{5}=20$.

2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
   (a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de X.
   $X(\Omega)=[\![0,2]\!]$.
   Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
   Ω est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A. Donc $\operatorname{card}\Omega=\binom{10}{5}$.

   Soit $k\in[\![0,2]\!]$.
   L'événement $(X=k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5-k)$ boules noires dans l'urne.
   Il a donc $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.

   Donc : $\forall\, k\in[\![0,2]\!],\ P(X=k)=\dfrac{\binom{2}{k}\times\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

   (b) On a toujours $Y=5X-15$.
   On en déduit que $Y(\Omega)=\{5k-15 \text{ avec } k\in[\![0,2]\!]\}$.

   Et on a $\forall\, k\in[\![0,2]\!],\ P(Y=5k-15)=P(X=k)=\dfrac{\binom{2}{k}\times\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

IV Espérance

1 Définition

Définition : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle positive

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
L'**espérance de** X est, par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x.$$

On a donc $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ suivant la sommabilité ou non de la famille réelle positive $(\mathbb{P}(X = x)x)_{x \in X(\Omega)}$.

Définition : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Lorsque la famille $(\mathbb{P}(X = x)\ x)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X **est d'espérance finie**, et on définit son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x.$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance (pas plus infinie que finie)
Lorsque X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = 0$, X est dite **centrée**.

Remarques

R1 – Une expression équivalente à « X est d'espérance finie » est « X a un moment d'ordre 1 ».

R2 – Une variable aléatoire réelle finie est toujours d'espérance finie (programme de MPSI).

R3 – Une variable aléatoire réelle positive à valeurs dénombrables $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_n)x_n$ converge **absolument**, et alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n)x_n$.

R4 – Ne pas confondre « centrée » et « symétrique » : si $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = -6) = 1/4$, la variable aléatoire X est bien centrée. Pour autant, X et $-X$ n'ont pas même loi.

2 Théorème de transfert

Théorème

Soit X un variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs réelles.

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\ f(x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x).$$

Remarque

Pas besoin de connaître la loi de $f(X)$!

Démonstration : Non exigible

Pas si difficile : il s'agit d'une application du théorème de sommation par paquets, en partitionnant $X(\Omega)$ par les $I_y = f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in f(X)(\Omega)$ (et en ajoutant des valeurs absolues pour la sommabilité : $\mathbb{P}(f(X) = y)\,|y| = \sum_{x \in I_y} \mathbb{P}(X = x)\,|f(x)|$).

Cela donne l'équivalence et permet de calculer

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{y\in f(X(\Omega))} \left(\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X=x) \right) y = \sum_{\substack{(x,y)\in f(X(\Omega))\times X(\Omega)\\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X=x) f(x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) f(x)$$ □

Corollaire

X a une espérance finie si et seulement si $|X|$ a une espérance finie.
Le cas échéant, $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)|x|$.

Corollaire

Uniquement dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, X est d'espérance finie si et seulement si $(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in\Omega}$ est sommable et dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

Remarque

Vu en MPSI dans le cas fini.

Démonstration

C'est un peu astucieux ! Considérons la variable aléatoire $Y = \mathrm{id}_\Omega$ et $f = X$ alors, le théorème précédent dit que $X = X\circ \mathrm{id} = f(Y)$ est d'espérance finie si et seulement si $\left(\mathbb{P}(Y=\omega)X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega} = \left(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$ est sommable et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\circ Y) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(Y=\omega)X(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$ □

Exercice : CCINP 97

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y)=(j,k)\big) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. **Déterminer les lois marginales de X et de Y.**
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. **Prouver que $E[2^{X+Y}]$ existe et la calculer.**

On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$P(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\big((X,Y)=(j,k)\big) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

Or, $\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}. \qquad (\star)$$

De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\,k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\,k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\,k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}.\qquad(\star\star)$$

Donc, d'après $(\star)$ et $(\star\star)$, on en déduit que $P(Y=k)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}+\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall j\in\mathbb{N}$, $P(X=j)=\frac{\left(\frac{1}{2}+j\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $P((X,Y)=(0,0))=0$ et $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$.

2. Posons $\forall(j,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{j,k}=2^{j+k}P\big((X,Y)=(j,k)\big)$.

   On a $a_{j,k}=\frac{j+k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}+\frac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}$.

   $\forall k\in\mathbb{N}$, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{(j-1)!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!}=\frac{1}{k!}$.

   De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\,k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\,k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{k}{k!}$.

   Ensuite, $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ et $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k!}=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}=\mathrm{e}$.

   Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

   On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right]=2\mathrm{e}$.

3 Propriétés de l'espérance

Une espérance peut être vue comme une intégrale, ce qui rend toutes ces propriétés naturelles.

Propriété

X et Y désignent deux variables aléatoires réelles discrètes.

(i) Si X est constante presque sûrement, c'est-à-dire qu'on a $a\in\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X=a)=1$, alors elle est d'espérance finie $\mathbb{E}(X)=a$.

*(ii) **Linéarité** : si X,Y sont d'espérances finies et $\lambda\in\mathbb{R}$, $X+\lambda Y$ l'est et $\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y)$.*

*(iii) **Positivité** : si $X\geqslant 0$ d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.*
De plus (positivité améliorée), si $X\geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X)=0$, alors X est nulle presque sûrement.

*(iv) **Croissance** : si $X\leqslant Y$ d'espérances finies, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*

*(v) Si X est d'espérance finie, $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée et appelée **variable aléatoire centrée associée à** X.*

*(vi) **Inégalité triangulaire** : Si X est d'espérance finie, $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|)$.*

(vii) Si Y est d'espérance finie et $|X|\leqslant Y$, alors X l'est et $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(Y)$.
En particulier, si X est bornée, elle est d'espérance finie.

Démonstration

(i) Immédiat.

(ii) **Linéarité** : Soit $Z=(X,Y)$ variable aléatoire discrète à valeurs dans $E=X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Soit $f:\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x+\lambda y\end{array}\right.$ Alors $T=X+\lambda Y=f(Z)$.

D'après le théorème de transfert, T est d'espérance finie si et seulement si $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)(x+\lambda y)\right)_{(x,y)\in E}$ est sommable.
Montrons que $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x\right)_{(x,y)\in E}$ est sommable.
On utilise le théorème de sommation par paquet avec la partition $(X(\Omega)\times\{y\})_{y\in Y(\Omega)}$.
Pour tout $y\in Y(\Omega)$,

$$0\leqslant \mathbb{P}(X=x,Y=y)\,|x|\leqslant \mathbb{P}(Y=y)\,|x|.$$

Or $(\mathbb{P}(Y=y)\,|x|)_{y\in Y(\Omega)}$ est sommable, donc $(\mathbb{P}(X=x,Y=y)\,|x|)_{y\in Y(\Omega)}$ l'est et

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x,Y=y)\,|x| = \mathbb{P}(X=x)\,|x|.$$

Or X a une espérance fini, donc $(\mathbb{P}(X=x)\,|x|)$ est sommable. D'après le théorème de sommabilité par paquet, $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x\right)_{(x,y)\in E}$ est sommable.
De même, on montre que $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)y\right)_{(x,y)\in E}$ est sommable.
On en déduit que $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)(x+\lambda y)\right)_{(x,y)\in E}$ est sommable, par la formule de transfert, $X+\lambda Y$ a une espérance finie donnée par

$$\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)(x+\lambda y)=\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)x+\lambda\sum_{(x,y)\in E}\mathbb{P}(X=x,Y=y)y=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y)$$

en utilisant la sommation par paquets (deux fois).

(iii) **Positivité** : Immédiat.
Si $X\geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X)=0=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)x$, somme (finie ou dénombrable) de termes positifs donc pour tout $x\in X(\Omega)$, $x=0$ ou $\mathbb{P}(X=x)=0$. Donc $\mathbb{P}(X=0)=1$: X est nulle presque partout.

(iv) **Croissance** : $Y-X\geqslant 0$ d'espérance finie : utiliser la linéarité.

(v) Conséquence de la linéarité de de l'espérance d'une variable aléatoire constante.

(vi) **Inégalité triangulaire** : $|X|$ est d'espérance finie par théorème de transfert et $-|X|\leqslant X\leqslant |X|$ puis la croissance.

(vii) Y est d'espérance finie, donc $(y\mathbb{P}(Y=y))_{y\in Y(\Omega)}$ est sommable.
Soit $f_1:(x,y)\mapsto x$, $f_2:(x,y)\mapsto y$ et $Z=(X,Y)$.
On a $X=f_1(X,Y)=f_1(Z)$ donc la formule de transfert dit que X a une espérance finie si et seulement si $(\mathbb{P}(Z=(x,y)f_1(x,y))_{(x,y)\in Z(\Omega)}=(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ est sommable.
Mais si $(x,y)\in Z(\Omega)$, il existe $\omega\in\Omega$ tel que $X(\omega)=x$ et $Y(\omega)=y$ donc $|x|\leqslant y$. Alors

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)\,|x|\leqslant \mathbb{P}(X=x,Y=y)\,y=\mathbb{P}(X=x,Y=y)\,f_2(x,y).$$

Mais comme $Y=f_2(X,Y)$ a une espérance finie, le théorème de transfert nous dit que $(\mathbb{P}(Z=(x,y)f_2(x,y))_{(x,y)\in Z(\Omega)}=(\mathbb{P}(X=x,Y=y)y)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ est sommable.
Donc $(\mathbb{P}(X=x,Y=y)x)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ l'est et X a une espérance finie.
Puis inégalité triangulaire et croissance.

□

Notation

L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ admettant une espérance finie est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ et $X\mapsto\mathbb{E}(X)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.

4 Espérances des lois usuelles

Propriété : Espérance des lois usuelles

(i) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=p$.

(ii) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X)=np$.

(iii) Si $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$.

(iv) Si $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X)=\lambda$.

Remarque

L'espérance d'une loi uniforme est la moyenne arithmétiques des valeurs (en nombre fini) prises par la variable aléatoire.

Démonstration

Dans tous les cas, la variable aléatoire est à valeurs réelles positives.

(i) $\mathbb{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0$.

(ii) L'espérance ne dépendant que de la loi on peut se placer dans le cas particulier où $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$ vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors,

$$\mathbb{E}(X) = n\mathbb{E}(X_1) = np.$$

(iii) On calcule en reconnaissant la dérivée d'une série entière géométrique convergente, avec $1-p \in]0,1[$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

(iv) On calcule, en reconnaissant cette fois une série exponentielle

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.$$ □

Corollaire

Soit A un événement de notre tribu $\mathscr{A}$. Alors $\mathbb{1}_A$ a une espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

5 Exercices CCINP

Exercice : CCINP 102

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. **Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.**
2. **On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, $\min$ désignant « le plus petit élément de ».**
   - **(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.**
     En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   - **(b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.**

---

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.
   $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.
   Alors on a $P(X_i \leqslant n) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1-q^n$.
   Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n) = q^n$.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \cdots \cap (X_N > n))$
   Donc $P(Y > n) = \prod\limits_{i=1}^{N} P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \cdots, X_N$ sont mutuellement indépendantes.
   Donc $P(Y > n) = \prod\limits_{i=1}^{N} q^n = q^{nN}$.
   Or $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$
   donc $P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}$.

   Calcul de $P(Y = n)$:
   Premier cas : si $n \geqslant 2$.
   $P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1)$.
   Donc $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
   Deuxième cas : si $n = 1$.
   $P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1-q^N)$.

(b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n) = q^{(n-1)N}(1-q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n) = \left(1-(1-q^N)\right)^{n-1}(1-q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1-q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}$.

Exercice : CCINP 106

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1. **Déterminer la loi du couple (U,V).**
2. **Déterminer la loi marginale de U.**
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
3. **Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.**
4. **U et V sont-elles indépendantes ?**

---

1. $(U,V)(\Omega) = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } m \geqslant n\}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geqslant n$.
   Premier cas : si $m = n$
   $P((U=m)\cap(V=n)) = P((X=n)\cap(Y=n)) = P(X=n)P(Y=n)$ car X et Y sont indépendantes.
   Donc $P((U=m)\cap(V=n)) = p^2q^{2n}$.
   Deuxième cas : si $m > n$
   $P((U=m)\cap(V=n)) = P([(X=m)\cap(Y=n)] \cup [(X=n)\cap(Y=m)])$
   Les événements $((X=m)\cap(Y=n))$ et $((X=n)\cap(Y=m))$ sont incompatibles donc :
   $P((U=m)\cap(V=n)) = P((X=m)\cap(Y=n)) + P((X=n)\cap(Y=m))$.
   Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc
   $P((U=m)\cap(V=n)) = 2P(X=m)P(Y=n) = 2p^2q^{n+m}$.

   Bilan : $P((U=m)\cap(V=n)) = \begin{cases} p^2q^{2n} & \text{si } m=n \\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
   $P(U=m) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P((U=m)\cap(V=n))$. (loi marginale de (U,V))
   Donc d'après 1., $P(U=m) = \sum\limits_{n=0}^{m} P((U=m)\cap(V=n)) \quad (*)$
   Premier cas : $m \geqslant 1$
   D'après $(*)$, $P(U=m) = P((U=m)\cap(V=m)) + \sum\limits_{n=0}^{m-1} P((U=m)\cap(V=n))$.
   Donc $P(U=m) = p^2q^{2m} + \sum\limits_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m} = p^2q^{2m} + 2p^2q^m \sum\limits_{n=0}^{m-1} q^n = p^2q^{2m} + 2p^2q^m \dfrac{1-q^m}{1-q} = p^2q^{2m} + 2pq^m(1-q^m)$
   Donc $P(U=m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.
   Deuxième cas : $m = 0$
   D'après $(*)$ et 1., $P(U=0) = P((U=0)\cap(V=0)) = p^2$.
   Bilan : $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(U=m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.

3. $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $P(W=n) = P(V=n-1) = pq^{2(n-1)}(1+q) = (1-q)q^{2(n-1)}(1+q)$.
   Donc $P(W=n) = (1-q^2)\left(q^2\right)^{n-1}$.
   Donc W suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
   Donc, d'après le cours, $E(W) = \dfrac{1}{1-q^2}$. Donc $E(V) = E(W-1) = E(W) - 1 = \dfrac{q^2}{1-q^2}$.

4. $P((U=0)\cap(V=1)) = 0$ et $P(U=0)P(V=1) = p^3q^2(1+q) \neq 0$. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice : CCINP 111

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ **converge et** $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **un espace probabilisé.**
Soit X **et** Y **deux variables aléatoires définies sur** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **et à valeurs dans** $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) **est donnée par**

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \textbf{si } k \leqslant n \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

1. **Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.**
2. **(a) Déterminer la loi de** Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ **suit une loi géométrique.**
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. **Déterminer la loi de** X.

---

1. On remarque que $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=k)\cap(Y=n)) \geqslant 0$.
   $(X,Y)(\Omega) = \{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } k \leqslant n\}$.
   Posons $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $p_{k,n} = P((X=k)\cap(Y=n))$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_{k,n}$ converge (car un nombre fini de termes non nuls).
   Et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n 2^n = p(1-p)^n$.
   De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p(1-p)^n = p\sum\limits_{n\geqslant 0}(1-p)^n$ converge (série géométrique convergente car $(1-p) \in]0,1[$).
   Et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = p\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n = p\dfrac{1}{1-(1-p)} = 1$.
   Donc on définit bien une loi de probabilité.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $P(Y=n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)
   Donc, d'après les calculs précédents, $P(Y=n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p(1-p)^n$.
   C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y=n) = p(1-p)^n$.
   (b) Posons $Z = 1+Y$.
   $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z=n) = P(Y=n-1) = p(1-p)^{n-1}$.
   Donc Z suit une loi géométrique de paramètre p.
   (c) D'après la question précédente, $E(Z) = \dfrac{1}{p}$.
   Or $Y = Z-1$ donc $E(Y) = E(Z)-1$ et donc $E(Y) = \dfrac{1-p}{p}$.
3. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X=k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)
   Donc $P(X=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p\left(\frac{1}{2}\right)^k (1-p)^k \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^{n-k}$.
   Donc, d'après les résultats admis dans l'exercice, $P(X=k) = p\left(\frac{1}{2}\right)^k (1-p)^k \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}(1-p)\right)^{k+1}}$
   C'est-à-dire $P(X=k) = p\left(\frac{1}{2}\right)^k (1-p)^k \dfrac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}}$.
   Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$.

Exercice : CCINP 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. **(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$.**
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. **Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.**
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

---

1. (a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $(X_1 + X_2 = n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} ((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).
   Donc

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} P((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) P(X_2 = n-k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

   Ainsi $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

   (b) $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = m)) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k) P(Y = m)$.
   Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

   Ainsi $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.

Exercice : CCINP 108

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. **Déterminer les lois de X et de Y.**
2. **(a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.**

(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $P(X=Y)$.

---

1. $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{e\,2^{i+1}j!}$.
   $X(\Omega)=\mathbb{N}$.
   Soit $i\in\mathbb{N}$.
   $\sum_{j\geqslant 0}\dfrac{1}{e\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{e\,2^{i+1}}\sum_{j\geqslant 0}\dfrac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{e\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   Or $P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$ donc $P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{e2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{e2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!} = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   Conclusion : $\forall\, i\in\mathbb{N}$, $P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.

   Soit $j\in\mathbb{N}$.
   $\sum_{i\geqslant 0}\dfrac{1}{e\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2e\,j!}\sum_{i\geqslant 0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$) et $\sum_{i=0}^{+\infty}\dfrac{1}{e\,2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2e\,j!}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{e\,j!}$.
   Or $P(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$.
   Donc $P(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\dfrac{1}{e2^{i+1}j!} = \dfrac{1}{2e\,j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i = \dfrac{1}{2e\,j!}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{e\,j!}$.
   Conclusion : $\forall\, j\in\mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{e\,j!}$.
2. (a) On pose $Z=X+1$.
   $Z(\Omega)=N^*$.
   De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $P(Z=n) = P(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{1}{2}$.
   Donc, d'après le cours, $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.
   Donc $E(X) = E(Z-1) = E(Z)-1 = 2-1 = 1$ et $V(X) = V(Z-1) = V(Z) = 2$.
   C'est-à-dire $E(X)=1$ et $V(X)=2$.

   (b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=1$.
   Donc, d'après le cours, $E(Y) = V(Y) = \lambda = 1$.
3. On a : $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.
4. $(X=Y) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :
   $$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{e2^{k+1}}\frac{1}{k!} = \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2e}e^{\frac{1}{2}}$$
   Donc $P(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$.

6 Inégalité de Markov

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance finie. Pour tout $a>0$,

$$\mathbb{P}(|X|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

Remarque

On a aussi $\mathbb{P}(|X|>a)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

Démonstration

Soit $Y=|X|$.

Première méthode : Y étant positive,

$$\mathbb{E}(Y)\geqslant\sum_{y\geqslant a}\mathbb{P}(Y=y)y\geqslant a\sum_{y\geqslant a}\mathbb{P}(Y=y)=a\mathbb{P}(Y\geqslant a).$$

Deuxième méthode : Théorème de transfert

$$\mathbb{E}(|X|)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)|x|\leqslant a\sum_{|x|\geqslant a}\mathbb{P}(X=x)=a\mathbb{P}(|X|\geqslant a)$$

Troisième méthode : $\mathbb{1}_{(Y\geqslant a)}\leqslant\frac{Y}{a}$ et croissance de $\mathbb{E}$.

□

7 Espérance et indépendance

Propriété

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance finie. Alors XY a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Réciproque fausse en général.

Démonstration

On utilise le théorème de transfert appliquée à $f:(x,y)\mapsto xy$.

$f(X,Y)=XY$ est d'espérance finie si et seulement si $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)xy\right)_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}$ est sommable, ce qui équivaut, en ajoutant des zéros, à la sommabilité de $\left(\mathbb{P}(X=x,Y=y)xy\right)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}=\left(\mathbb{P}(X=x)x\times\mathbb{P}(Y=y)y\right)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ par indépendance.

On est ramenée à une « suite double produit » qui est bien sommable car X et Y ont des espérance finies et dont la somme est le produit des espérances.

Contre-exemple : Soit X_1 de loi $\mathbb{P}_{X_1}=\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{4}(\delta_1+\delta_{-1})$. $\mathbb{E}(X_1)=0$. Et $X_2=\mathbb{1}_{(X_1=0)}$.

Alors $X_1X_2\equiv0$ donc $\mathbb{E}(X_1X_2)=0=\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

Pourtant $X_1\not\perp\!\!\!\perp X_2$ car $\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=0\neq\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1)=\frac{1}{8}$. □

Remarque

Cette formule se généralise par récurrence à une suite finie de variables aléatoires **mutuellement indépendantes**, via le lemme des coalitions (si $X_1,d\ldots,X_{n+1}$ sont indépendantes, alors $X_1\cdots X_n$ et X_{n+1} sont bien indépendantes.) Mais cette généralisation n'est pas au programme officiellement.

V Variance et covariance

1 Moments

Sous réserve d'existence, les moments d'une variable aléatoire sont les paramètres numériques qui donnent des renseignements sur sa loi. En général, on se limite aux moments d'ordre 1 (espérance) et d'ordre 2 (permet d'obtenir la variance).

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. Soit $p\geqslant1$ (p réel).
On dit que X **admet un moment d'ordre** p lorsque X^p est d'espérance finie.
Le **moment d'ordre** p de X est alors

$$\mathbb{E}\left(X^p\right)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)x^p.$$

On note $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre p.

Remarque

Le moment d'ordre 1 de X est son espérance.

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ont des moments d'ordre 2, leur produit est d'espérance finie, et

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

Démonstration

$|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ est d'espérance finie, puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme bilinéaire symétrique positive $(X,Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$. □

Corollaire

$\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété

Si une variable aléatoire réelle discrète admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

Démonstration

Première méthode : Inégalité de Cauchy-Schwarz à appliquée à X et 1.

Deuxième méthode : Comment dans la preuve précédente : $|X| = |X \times 1| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+1)$.

Remarque

Donc $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un sous-espace de $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2 Variance et écart-type

Définition : Variance, écart-type, variable réduite

Soit X un variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **variance** de X le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}$.
Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, X est dite **réduite**.

Remarques

R 1 – $\mathbb{V}(X)$ est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à X : $X - \mathbb{E}(X)$. Par positivité de l'espérance, $\mathbb{V}(x) \geqslant 0$ donc l'écart-type est bien défini.

R 2 – L'écart-type s'interprète comme une distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ entre le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs prises par X et le vecteur dont toutes les coordonnées valent $\mathbb{E}(X)$. C'est donc un indicateur de dispersion de X autour de sa moyenne $\mathbb{E}(X)$.

R 3 – Ne pas hésiter à noter $m = \mathbb{E}(X)$. Il est plus facile à visualiser $\mathbb{E}(X - m) = \mathbb{E}(X) - m = 0$ que $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$, par exemple.

R 4 – D'après la formule de transfert, si les valeurs prises par X sont les x_i pour $i \in I$ et $m = \mathbb{E}(X)$,

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)(x_i - m)^2.$$

R 5 – Plus la variance (et donc l'écart-type) est petit, plus X est concentrée autour de sa moyenne $m = \mathbb{E}(X)$.
Le cas extrême est pour une variable aléatoire constante : $\mathbb{V}(X) = 0$.
Réciproquement, si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$ ou $x = m = \mathbb{E}(X)$. Autrement dit, $\mathbb{P}(X \neq m) = 0$ ou encore $\mathbb{P}(X = m) = 1$: X est constante presque sûrement.

Exercice : CCINP 100

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. **Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.**
2. **Calculer λ.**
3. **Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.**
4. **X admet-elle une variance ? Justifier.**

---

1. On obtient $R(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$P(X \leqslant N) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)} \right) = \lambda \left(\dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=2}^{N+1} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=3}^{N+2} \dfrac{1}{n} \right)$
Et donc, après télescopage, $P(X \leqslant N) = \lambda \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N+1} + \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)} \right)$ c'est-à-dire :
$P(X \leqslant N) = \lambda \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)} \right)$. (*)
Or $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X \leqslant N) = 1$.
Donc d'après (*), $\lambda = 4$.
3. $\sum\limits_{n \geqslant 1} nP(X = n) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$ converge car au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$.
Donc X admet une espérance.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4}{(k+1)(k+2)} = 4 \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2} \right) = 4 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} - \sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k+1} \right) = 2 - \dfrac{4}{n+2}$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X = k) = 2$ et $E(X) = 2$.
4. Comme $E(X)$ existe, X admettra une variance à condition que X^2 admette une espérance.
$\sum\limits_{n \geqslant 1} n^2 P(X = n) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{4n}{(n+1)(n+2)}$.
Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).
Donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^2 P(X = n)$ diverge.
Donc X^2 n'admet pas d'espérance et donc X n'admet pas de variance.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.

(i) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** *: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.*

(ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(x)$ donc $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

(iii) Si $\sigma(X) \neq 0$, $m = \mathbb{E}(X)$, $\dfrac{X - m}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée ***variable aléatoire centrée réduite associée à*** *X.*

Remarque

La deuxième formule est intuitive au sens où une translation des valeurs de X ne perturbe la distance à la moyenne, et comme cette distance est au carré, une homothétie de rapport a la multiplie par a^2.

Démonstration

(i) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2mX + m^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2m\mathbb{E}(X) + m^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ par linéarité.

(ii) $\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\left((aX+b)^2\right) - \mathbb{E}(aX+b)^2 = a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 = a^2V(X)$. □

3 Covariance

Définition : Covariance

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance** du couple (X,Y) le nombre

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, X et Y sont dites **non corrélées**.

Remarques

R 1 – La covariance mesure la corrélation entre les variations de X et de Y dans le sens où elle est positive lorsque X et Y s'écartent de leur moyenne dans le même sens, et négative si c'est dans le sens opposé.

R 2 – Cela ressemble à un produit scalaire et ce n'est pas un hasard ! On vérifie facilement qu'il s'agit d'une forme bilinéaire positive. La variance correspond au carré de la « norme » (et donc l'écart-type à la « norme ».)
Cela permet par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (mais sans le cas d'égalité) : $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ ie $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Propriété

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrète admettant un moment d'ordre 2.

(i) Cov est une forme bilinéaire positive.

*(ii) **Théorème de Kœnig-Huygens** : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

(iii) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(iv) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et la réciproque est fausse.

Démonstration

(i) Provient de la linéarité et la positivité de $\mathbb{E}$.

(ii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(iii) C'est une identité remarquable :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y).$$

ou alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y))^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) + 2\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) + \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right).\end{aligned}$$

(iv) Immédiat avec (ii). (Voir contre-exemple de $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. □

Remarques

R 1 – $\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \Longrightarrow X$ constante presque sûrement.

R 2 – $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Cov}\left(\dfrac{X}{\sigma(X)} \times \dfrac{Y}{\sigma(Y)}\right) \in]-1,1[$ est le cœfficient de corrélation de X et Y.

4 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété

Soient $X_1,\dots,X_n$, n variables aléatoires réelles discrète admettant un moment d'ordre 2.

(i) $X_1+\cdots+X_n$ admet un moment d'ordre 2 et

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right).$$

(ii) Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes deux à deux,

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n).$$

En particulier, si $X_1,\dots,X_n$ sont des vaiid, $\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=n\mathbb{V}(X_1)$.

Démonstration

$\mathscr{L}^2(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(i) Le cas $n=1$ est trivial et le cas $n=2$ a déjà été vu.
Si c'est vrai pour $n-1$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n)&=\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_{n-1})+\mathbb{V}(X_n)+2\,\mathrm{Cov}(X_1+\cdots+X_{n-1},X_n)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{V}(X_i)+\mathbb{V}(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)+2\sum_{1\leqslant i<j=n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right).\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right).\end{aligned}$$

(ii) Immédiat. $\square$

5 Cas des lois usuelles

Propriété

(i) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, $\mathbb{E}(X)=p$ et $\mathbb{V}(X)=p(1-p)=pq$.

(ii) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, $\mathbb{E}(X)=np$ et $\mathbb{V}(X)=np(1-p)=npq$.

(iii) Si $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}$.

(iv) Si $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{V}(X)=\lambda$.

Démonstration

(i) $X^2=X$, $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$.

(ii) On prend $X=X_1+\ldots+X_n$ où $X_1,\ldots,X_n$ sont des vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$. $\mathbb{V}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)=np(1-p)=npq$.

(iii) $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\dfrac{1}{p}^2$ avec $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n^2pq^{n-1}=pq\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n(n-1)pq^{n-2}+p\sum_{n\in\mathbb{N}^*}nq^{n-1}=\dfrac{2pq}{(1-q)^3}+\dfrac{p}{(1-q)^2}=\dfrac{1+q}{p^2}$
donc $\mathbb{V}(X)=\dfrac{q}{p^2}$.

(iv) même principe mais avec de l'exponentielle. $\square$

VI Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et Loi faible des grands nombres

Propriété : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}(X)$, $a > 0$.

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire, en notant m l'espérance de X et σ son écart-type,

$$\mathbb{P}\left(|X - m| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Démonstration

Découle directement de l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{a^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

ou, directement,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X = x) \\ &\geqslant a^2 \sum_{x \mid |x - \mathbb{E}(X)| \geqslant a} \mathbb{P}(X = x) = a^2\, \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \qquad \square\end{aligned}$$

Remarques

R 1 – On a aussi $\mathbb{P}\left(|X - m| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}$.

R 2 – le a^2 est logique pour des raisons d'homogénéité (dimension).

R 3 – On retrouve avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, le fait que si $\mathbb{V}(X) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = 0$.
Donc, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 0) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

R 4 – En particulier, $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| < a\right) \geqslant 1 - \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$.

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes identiquement distribuées (de même loi) sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Soit m l'espérance de X_n et σ son écart-type.

On pose enfin $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Remarque

Parmi tous les échantillons de valeurs possibles $(X_1, \ldots, X_n)$, ceux dont la moyenne (S_n/n) s'éloigne de l'espérance m sont rares, et cette rareté s'accentue avec la taille de l'échantillon ($n \to +\infty$).

Lemme

Sous les mêmes conditions,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Remarque

Le programme précise que cette inégalité doit pouvoir être retrouvée.

Démonstration

C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev En effet, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=m$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$ par indépendance. □

Exercice : CCINP 99

1. **Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**
2. **Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$.**
   Prouver que : $\forall a\in\,]0,+\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.**
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

---

1. Soit $a\in\,]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :
   $P(|X-E(X)|\geqslant a)\leqslant\frac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X=\frac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X)=E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X)=\frac{1}{n^2}V(S_n)=\frac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i\in\mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p=\frac{2}{5}=0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.
   On a d'après le cours, $\forall i\in\mathbb{N}$, $E(Y_i)=0,4$ et $V(Y_i)=0,4(1-0,4)=0,24$.
   On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)>0,95$.
   Or $P(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)=P\left(0,35\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant 0,45\right)=P\left(-0,05\leqslant\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\leqslant 0,05\right)$
   $=P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|\leqslant 0,05\right)=1-P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|>0,05\right)$.
   On a donc $P(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)=1-P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|>0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|\geqslant 0,05\right)\leqslant\frac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P(0,35\leqslant T_n\leqslant 0,45)\geqslant 1-\frac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1-\frac{0,24}{n(0,05)^2}\geqslant 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n\geqslant\frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n\geqslant 1920$.

VII Fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1 Définition

Définition : Fonction génératrice

Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ **à valeurs dans** $\mathbb{N}$.

On appelle **fonction génératrice associée à** X la fonction $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$.

Propriétés

(i) Le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ est au moins égal à 1, et elle converge normalement sur $[-1,1]$.

(ii) Pour tout $t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

(iii) G_X est continue sur $[-1,1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration

(i) Vient du fait que $\sum \mathbb{P}(X=n)$ converge.

(ii) Théorème de transfert grâce à la converge absolue de la série.

(iii) Convergence normale sur $[-1,1]$ et propriété des séries entières. □

Propriété : Caractérisation de la loi

Deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

Démonstration

Unicité du DSE. □

Propriété

(i) X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X) = G_X(1)$.

(ii) X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.
On exprime alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.

Démonstration

Soit $f_n : t \mapsto \mathbb{P}(X=n)t^n$.

(i) Si X est d'espérance finie, alors on vérifie que $\sum f_n'$ converge normalement ce qui permet via théorème de justifier que G_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$ et d'obtenir $G_X(1) = \mathbb{E}(X)$.
Si G_X est dérivable est 1, G_X'' étant positive sur $[0,1[$, G_X' est croissante et admet une limite en 1.
Comme G_X est continue en 1, le théorème de la limite de la dérivée s'applique et cette limite ne peut valoir que $G_X'(1)$.
Puis on majore $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X=n)nt^{n-1}$ par $G_X'(1)$ et on fait tendre t vers 1 : on obtient que $(\mathbb{P}(X=n)n)_n$ est sommable puis le résultat.

(ii) Même principe : $X(X-1)$ est d'espérance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et

$\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$.
Puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = G_X''(1) + G_X(1) - G_X'(1)^2$.

2 Cas des lois usuelles

Le programme demande de savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. Allons-y.

Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$:

$$\boxed{G_X(t) = \sum_{n=0}^{1} \mathbb{P}(X=n)t^n = q + pt = 1 - p + pt}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k$ donc

$$\boxed{G_X(t) = (q+pt)^n = (1-p+pt)^n}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$: $G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{n-1}t^n$ donc

$$\boxed{G_X(t) = \frac{pt}{1-qt} = \frac{pt}{1-(1-p)t}}$$

définie sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{p}{q^2}$.

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} t^n$ donc

$$\boxed{G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$

définie sur $\mathbb{R}$, ce qui redonne bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

3 Somme des variables aléatoires

Propriété

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}.$$

Démonstration

Pour chaque t, les t^{X_i} sont indépendantes (mutuellement), donc $\mathbb{E}\left(t^{X_1+\cdots+X_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} t^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(t^{X_i}\right)$. □

Applications

- On retrouve la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la somme de n vaiid de loi de Bernoulli.
- Une somme de variables aléatoires de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_i)$ est encore de loi de Poisson de paramètre la somme des λ_i.
- Une somme de variables aléatoires de loi $\mathscr{B}(n_i, p)$ indépendantes est de loi $\mathscr{B}(\sum n_i, p)$

4 Exercices CCINP

Exercice : CCINP 96 nouveau 2022

Exercice : CCINP 110

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. **Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.**
On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.

   (a) **Prouver que $R_X \geqslant 1$.**
   On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

   (b) **Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.**

2. (a) **On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.**
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) **Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.**
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

---

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-1,1]$, $|t^n P(X=n)| \leqslant P(X=n)$ et $\sum P(X=n)$ converge ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$).
   Donc $\forall t \in [-1,1]$, $\sum t^n P(X=n)$ converge absolument.
   On en déduit $R_X \geqslant 1$ et aussi $[-1,1] \subset D_{G_X}$. Au surplus, pour tout t dans $[-1,1]$, le théorème du transfert assure que la variable aléatoire t^X admet une espérance et $E(t^X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n) = G_X(t)$. G_X est la fonction génératrice de X.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_X \geqslant 1$. Donc, d'après le cours, G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[\subset]-R_X, R_X[$.
   De plus, $\forall t \in]-1,1[$, $G_X^{(k)}(t) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} P(X=n)$.
   En particulier, $G_X^{(k)}(0) = k! P(X=k)$ et donc $P(X=k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum t^n P(X=n) = \sum t^n \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et donc $D_{G_X} = \mathbb{R}$.
   De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

   (b) On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   $D_{G_X} = D_{G_Y} = \mathbb{R}$ et, si on pose $Z = X+Y$, alors $[-1,1] \subset D_{G_Z}$.
   Alors, $\forall t \in [-1,1]$, $G_Z(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$ car X et Y sont indépendantes et donc, d'après le cours, t^X et t^Y sont indépendantes.
   Donc, d'après 2.(a), $G_Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)} \mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$.

   On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
   Donc, d'après 1.(b), comme Z a la même fonction génératrice qu'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$, alors $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

VIII Formulaire

Sous réserve d'existence, sommabilité, d'admission de moments, etc. Voici les principales formules du chapitre.

- **Loi de X :** $\boxed{\mathbb{P}_X : A \mapsto \sum\limits_{x \in A} \mathbb{P}(X=x)}$ déterminée par les $\mathbb{P}(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$, sommables de somme 1.
- **Espérance de X :** $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) x}$ et si Ω fini ou dénombrable $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega).}$
- **Formule de transfert :** $\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) f(x).}$

- **Variance de** X : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.}$

- **Covariance de** X **et** Y : $\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$ nulle si indépendantes.

- **Variance d'une somme** : $\boxed{\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).}$

- **Inégalité de Markov** : $\boxed{\text{Si } a > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.}$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : $\boxed{\text{Si } a > 0,\ \mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}}$ où $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

- **Loi de Bernoulli** $\mathscr{B}(p)$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q \qquad \mathbb{E}(X) = p \qquad \mathbb{V}(X) = pq \qquad G_X(t) = q + pt}$$

- **Loi binomiale** $\mathscr{B}(n, p)$:

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \mathbb{E}(X) = np \qquad \mathbb{V}(X) = npq \qquad G_X(t) = (q + pt)^n.}$$

- **Loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$:

$$\boxed{p \in]0, 1[\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1} \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2} \qquad G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}}$$

- **Loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$:

$$\boxed{\lambda > 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad \mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda \qquad G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$$