chapitreXXIV

Suites totales et endomorphismes des espaces euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

IV Suites totales

1 Définition et exemples

Définition : Suite totale

On dit que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **totale** dans l'espace préhilbertien réel $(E,(\cdot|\cdot))$ lorsque $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} = E$.

Autrement dit, lorsque, pour tout $x\in E$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha_0,\dots,\alpha_d$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{d} \alpha_k e_k \right\| \leqslant \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$.

Ou encore, pour tout $x\in E$, il existe une suite $(x_n)\in\left(\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - x\| \to 0$.

2 Caractérisation par les projections orthogonales

Propriété

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace préhilbertien réel $(E,(\cdot|\cdot))$.

Pour tout n, p_n désigne la projection orthogonale sur Vect$(e_0,\dots,e_n)$.

Alors, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale si et seulement si pour tout $x\in E$, la suite $\left(p_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

V Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

Propriété

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. Les coefficients de la matrice $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont donnés par

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \left(e_i \,\middle|\, u(e_j)\right)$$

VI Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Définition

Définition : Isométrie vectorielle

Soit $(E,|\,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**) de E tout endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall x\in E,\quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathscr{O}(E)\subset\mathscr{GL}(E)$.

2 Caractérisations

Propriété

Soient $(E,|\,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u\in\mathscr{L}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est une isométrie vectorielle,*

(ii) *u conserve le produit scalaire : $\forall x,y\in E,\ \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$,*

(iii) *u transforme TOUTE b.o.n. en une b.o.n.*

(iv) *u transforme UNE b.o.n. en une b.o.n.*

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u\in\mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

$$u\left(F^{\perp}\right) = (u(F))^{\perp}.$$

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u\in\mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

3 Structure

Propriété

*L'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** E.*

VII Matrices orthogonales

1 Définition

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si $A^{\mathsf{T}}A = I_n$.

On note $\mathscr{O}(n)$ ou $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{O}(n)$

(ii) *A est inversible et $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$*

(iii) $AA^{\mathsf{T}} = I_n$

(iv) $A^{\mathsf{T}} \in \mathcal{O}(n)$

(v) *Les colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

(vi) *Les lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

3 Lien avec les isométries

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathcal{O}(E)$

(ii) *Dans TOUTE b.o.n., la matrice de u est orthogonale*

(iii) *Il existe UNE b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale*

4 Structure

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe appelé ***groupe orthogonal d'ordre*** *n. C'est même un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

5 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété

Soient, dans un espace euclidien E, $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

6 Isométries positives et négatives

Propriété

Les applications et les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1. ***La réciproque est fausse.***

Définition : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif (+1), dites **matrices orthogonales positives**. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(n)$.
Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives**. Les ensemble est $\mathcal{O}^-(n)$.

Définition : Rotations

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** E, noté $\mathcal{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif (+1), appelées **isométries positives** ou **rotations de** E. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(E)$. On parle aussi d'**isométries directes.**
Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Propriété

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :

(i) *u isométrie directe (rotation) de E.*

(ii) *u transforme toute bond en bond.*

(iii) *u transforme une bond en bond.*

Propriété

Toute réflexion d'un espace euclidien orienté est une isométrie indirecte.

VIII Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

1 Définition

Définition

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (u(x)|y) = (x|u(y))$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, noté $\mathcal{S}(E)$.

2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

Propriété

Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** *de l'espace euclidien E, $u \in \mathcal{L}(E)$.*
u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

3 Cas des projections

Propriété

Soit p un projecteur ($p \circ p = p$).
Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$) si et seulement s'il est symétrique.

4 Sous-espaces stables

Propriété

Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et F stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est.

5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

E désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

Théorème : spectral

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de u.

Théorème : spectral

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormale : si $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème : spectral

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{\mathsf{T}} = PDP^{-1}.$$

IX Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

Propriété

Si u est une isométrie de E et F stable par u, alors $F^\perp$ l'est.

Lemme

Si u est une isométrie de E, alors u possède une droite ou un plan stable.

Lemme

Si u est une isométrie de E, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Théorème : Réduction des isométries

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, des entiers naturels m, p, q, des réels $\theta_1, \ldots, \theta_m$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

où, pour tout réel θ,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Théorème : Version matricielle

Soit M une matrice orthogonale ($M \in \mathcal{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice Q de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^T$.

X Cas des dimensions 2 et 3

1 Isométries en dimension 2

Propriété : Description de $\mathcal{O}(2)$

$\mathcal{O}(2) = \mathcal{S}\mathcal{O}(2) \sqcup \mathcal{O}^-(2)$ avec

$$\mathcal{S}\mathcal{O}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathcal{O}^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Propriété

Le groupe $(\mathcal{S}\mathcal{O}(2), \times)$ est commutatif.

Propriété

Soit E euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathcal{S}\mathcal{O}(E)$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe, la matrice de r soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

*On dit que r est la **rotation vectorielle d'angle de mesure** θ.*

Propriété

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs non nuls de E. Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ et $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Définition : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π.

Propriété

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2.

(i) $(\vec{x} | \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$. *(ii)* $[\vec{x}, \vec{y}] = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

Propriété

Les isométries directes conservent les angles orientés tandis que les isométries indirectes les changent en leur opposé.

Propriété : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta} z$.
- Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est
$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.

Méthode : Étudier une isométrie en dim. 2...

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont ortho**NORM**ées).

Elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ.

- Soit elle est de la forme R_θ, c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation.
- Soit elle est de la forme S_θ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

2 Isométries en dimension 3

Propriété : Description des isométries en dimension 3

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

(i) Soit $u = r \in \mathcal{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \mathrm{id}_E$, et alors $\dim \operatorname{Ker}(r - \mathrm{id}) = 1$ et $D = \operatorname{Ker}(r - \mathrm{id})$ est appelé **axe de la rotation**.

On fixe a unitaire dirigeant D et (e_1, e_2) une base orthonormale de $P = D^\perp$. (e_1, e_2) est dite directe lorsque (e_1, e_2, a) l'est. On dit que D **est dirigée et orientée par** a.

On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe (e_1, e_2, a) adaptée à la décomposition $E = D^\perp \oplus D$, la matrice de r est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On dit que θ **est une mesure de l'angle de la rotation** r **(modulo** 2π**).**

(ii) (Hors-Programme) Soit $u \in \mathcal{O}^-(E)$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ composée commutative d'une rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et d'une réflexion de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).

Propriété

Soit r est une rotation de E espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de id_E,.

- Son axe est l'ensemble de ses vecteurs invariants.
- Si θ est une mesure de son angle, alors $\operatorname{tr} r = 2\cos\theta + 1$.
- Le signe de $\sin\theta$ est celui du produit mixte $[x, r(x), a]$ où a est un vecteur directeur orientant l'axe (non nécessairement unitaire) et x un vecteur n'appartenant pas à l'axe (en général pris dans la base canonique).

Méthode : Étude d'isométries en dimension 3

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariant, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\mathrm{id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$: après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.