chapitreXXIV

Suites totales et endomorphismes des espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ;*
- *introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;*
- *à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de MPSI relatives aux isométries et celles de MP relatives à la réduction des endomorphismes.*

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

La notion de forme quadratique est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.	$\leftrightarrows$ PC : polariseur, loi de Malus.
Caractérisation métrique du projeté orthogonal.	
Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Inégalité de Bessel.	
b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect $(e_0,\dots,e_n)$, alors, pour tout x de E, $\left(p_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux. $\leftrightarrows$ I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.
c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques.	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme. $\leftrightarrows$ SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.
d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale.	Interprétation dans le registre matriciel.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». $\leftrightarrows$ SI : liaisons entre solides.

Table des matières

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

IV Suites totales

1 Définition et exemples

Définition : Suite totale

On dit que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **totale** dans l'espace préhilbertien réel $(E,(\cdot|\cdot))$ lorsque $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)} = E$.

Autrement dit, lorsque, pour tout $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0,\dots,\alpha_d$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{d} \alpha_k e_k \right\| \leqslant \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$.

Ou encore, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n) \in (\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - x\| \to 0$.

Exemple : fondamental

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

On note w est une fonction continue strictement positive intégrable sur $]a,b[$. Munissons $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_a^b w(t) f(t) g(t)\, dt$$

Alors la famille $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale. Plus généralement, toute famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n, $\deg(e_n) = n$, est totale.

En effet, la clé est ici le théorème de Weierstrass. On commence par comparer la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire et la norme N_∞ de la convergence uniforme : notant $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$,

$$\forall f \in E \qquad \|f\| \leqslant k N_\infty$$

avec $k = \sqrt{\int_a^b w}$. Il y a par théorème de Weierstrass une suite (P_n) d'éléments de $\mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbf{N}}\right)$ qui converge vers f pour N_∞. A fortiori il y a convergence pour $\|.\|$.

2 Caractérisation par les projections orthogonales

Propriété

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace préhilbertien réel $(E,(\cdot|\cdot))$.
Pour tout n, p_n désigne la projection orthogonale sur Vect$(e_0,\dots,e_n)$.
Alors, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale si et seulement si pour tout $x\in E$, la suite $\left(p_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Démonstration

Le sens réciproque est immédiat, par définition d'une suite totale.
Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, $x\in E$, $\varepsilon>0$.
On a $y\in\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$.
Soit d tel que $y\in\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_d)$.
Si $n\geqslant d$, $y\in\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$ et $\mathrm{d}(x,\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n))=\|x-p_n(x)\|\leqslant\|x-y\|\leqslant\varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

Exercice : Égalité de Bessel-Parseval

Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel $(E,(\cdot|\cdot))$, alors,

$$\forall x\in E\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(e_n|x)^2\leqslant\|x\|^2$$

et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale si et seulement si

$$\forall x\in E\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(e_n|x)^2=\|x\|^2$$

L'inégalité a été vue (inégalité de Bessel). L'équivalence vient de la simple remarque suivante (voir chapitre sur la projection orthogonale sur un sev de dimension finie) :

$$\|x-p_n(x)\|^2=\|x\|^2-\|p_n(x)\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=0}^{n}(e_k|x)^2$$

et de la proposition précédente.

Exercice

Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, si $F=$ Vect$(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, alors $F^\perp=\{0_E\}$

Il suffit de dire que, si $x\in F^\perp$, alors $p_n(x)=0_E$ pour tout x. Or la suite $(p_n(x))$ converge vers x...

V Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

Propriété

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. Les coefficients de la matrice $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont donnés par

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\qquad a_{i,j}=\left(e_i\;\middle|u(e_j)\right)$$

Démonstration

$a_{i,j}$ est la coordonnée de $u(e_j)$ selon le vecteur e_j de la base orthonormale $\mathscr{B}$. □

VI Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Définition

Définition : Isométrie vectorielle

Soit $(E,|\,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**) de E tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathscr{O}(E) \subset \mathscr{GL}(E)$.

Démonstration

Si $u \in \mathscr{O}(E)$ et $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$. u est ainsi un endomorphisme de E injectif avec E de dimension finie, donc bijectif. □

Remarques

R 1 – En particulier, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathrm{d}(u(x),u(y)) = \mathrm{d}(x,y)$: u conserve les distances.

R 2 – Pour être tout-à-fait précis, il faudrait noter $\mathscr{O}(E,|\,)$ cet ensemble, car les isométries ne sont pas les mêmes suivant le produit scalaire que l'on choisit.

R 3 – Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, alors qu'une projection orthogonale non triviale ne l'est pas (si $F \neq E$ et $x \in F^{\perp} \setminus \{0\}$, $\|p_F(x)\| = 0 \neq \|x\|$ (p_F n'est pas injectif).) Attention donc au vocabulaire !

2 Caractérisations

Propriété

Soient $(E,|\,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est une isométrie vectorielle,*

(ii) *u conserve le produit scalaire : $\forall x,y \in E, \quad (u(x)|u(y)) = (x|y)$,*

(iii) *u transforme TOUTE b.o.n. en une b.o.n.*

(iv) *u transforme UNE b.o.n. en une b.o.n.*

Démonstration

On a déjà facilement $(ii) \Longrightarrow (i)$ et $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Si u est une isométrie vectorielle, alors pour tout vecteurs x et y de E,

$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \text{ (car } u \text{ conserve la norme)}\\ &= (x|y)\end{aligned}$$

- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: On suppose que u conserve le produit scalaire.
  Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.

Alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, donc $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une famille orthonormale de E, et est constituée de n vecteurs (non nuls, car normés) en dimension n : c'est une base orthonormale de E.

- $(iv) \Longrightarrow (i)$: On suppose que u transforme une b.o.n. $(e_1,\dots,e_n)$ en une b.o.n. de E. Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$.

  L'orthonormalité de la famille $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ nous donne de plus

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)u(e_i) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2 \, \|u(ei)\|^2 \text{ (d'après le théorème de Pythagore)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

  u est donc bien une isométrie vectorielle. □

Remarques

R 1 – Un exercice classique consiste à montrer qu'une application qui conserve la norme et telle que $u(0_E) = 0_E$ est automatiquement linéaire (voir TD).

R 2 – Si u est une orthogonal, alors $\forall\, x,y \in E,\ \ (u(x)|y) = \left(x \middle| u^{-1}(y)\right)$.

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

$$u\left(F^{\perp}\right) = (u(F))^{\perp}.$$

Démonstration

Si $x \in u(F^{\perp})$, il existe $y \in F^{\perp}$ tel que $x = u(y)$.
Alors, pour tout $z \in F$, $(x|u(z)) = (u(y)|u(z)) = (y|z) = 0$ car $y \in F^{\perp}$.
Donc $u(F^{\perp}) \subset u(F)^{\perp}$, et on obtient l'égalité en regardant les dimension et en utilisant la bijectivité de u :

$$\dim u(F^{\perp}) = \dim F^{\perp} = \dim E - \dim F = \dim E - \dim u(F) = \dim u(F)^{\perp}. \quad \square$$

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

Démonstration

$u(F) \subset F$ donc $F^{\perp} \subset u(F)^{\perp} = u\left(F^{\perp}\right)$, or ils ont même dimension par bijectivité de u, donc $u\left(F^{\perp}\right) = F^{\perp}$. □

3 Structure

Propriété

*L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** E.*

Démonstration

Comme $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$, on va en fait montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

- Comme on l'a déjà vu, $id_E \in \mathcal{O}(E)$.
- Soit u et v deux isométries vectorielles. Montrons que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
  $u \circ v^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et si $x \in E$, $\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car u est une isométrie vectorielle.
  Mais comme v est aussi une isométrie, $\|x\| = \|v(v^{-1}(x))\| = \|v^{-1}(x)\|$.
  Finalement, pour tout $x \in E$, $\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$, et $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. □

Exercice : CCINP 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. **Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.**
   (a) **Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.**
   (b) **Démontrer que u est bijectif.**
2. **Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.**
3. **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.**
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

---

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $\left(u(x)|u(y)\right) = (x|y)$.

   (a) Soit $(x, y) \in E^2$.
   On a, d'une part, $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$. (*)
   D'autre part, $\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|y\|^2$. (**)

   On en déduit, d'après (*) et (**), que $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

   (b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
   Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$.
   Donc $x = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
   Donc u est injectif.
   Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.

2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
   On a $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
   On a aussi, évidemment, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \varnothing$.
   Soit $(u, v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
   $\forall x \in E$, $\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|u(v^{-1}(x))\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Et $\|v^{-1}(x)\| = \|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
   Donc $\forall x \in E, \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$.
   On en déduit, d'après 1.(a), que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.

   Soit $(i, j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$.
   $u \in \mathcal{O}(E)$ donc $\left(u(e_i)|u(e_j)\right) = \left(e_i|e_j\right)$.
   Or e est une base orthonormée de E donc $\left(e_i|e_j\right) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.
   On en déduit que $\forall (i, j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, \left(u(e_i)|u(e_j)\right) = \delta_i^j$.
   C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une famille orthonormée de E.
   Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.
   Donc $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

   Soit $x \in E$.
   Comme e est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   $||x||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \left(e_i|e_j\right)$.

Or e est une base orthonormée de E donc $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (*)

De même, par linéarité de u, $||u(x)||^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) | \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \left(u(e_i)|u(e_j)\right)$.

Or $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E, donc $||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (**)

D'après (*) et (**), $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$.
Donc, d'après 1.(a), $u \in \mathscr{O}(E)$.

VII Matrices orthogonales

1 Définition

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si $A^\intercal A = I_n$.
On note $\mathscr{O}(n)$ ou $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathscr{O}(n)$

(ii) *A est inversible et $A^{-1} = A^\intercal$*

(iii) $AA^\intercal = I_n$

(iv) $A^\intercal \in \mathscr{O}(n)$

(v) *Les colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

(vi) *Les lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

Démonstration

- $(i) \iff (ii) \iff (iii) \iff (iv)$: Facile.
- $(i) \iff (v)$: pour tout (i,j), $(A^\intercal A)_{i,j} = C_i^\intercal C_j = (C_i|C_j)$ donne immédiatement l'équivalence.
- $(iv) \iff (vi)$ s'obtient en transposant. □

Remarque

⚠ La matrice est ortho**GON**ale si et seulement si ses colonnes sont ortho**NOR**males.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$(C_1|C_2) = \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 = 0$.
$(C_2|C_3) = -\sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3\sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 = 0$.
$(C_1|C_3) = -\sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 = 0$.
$\|C_1\|^2 = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2 + 1/2 = 1$.
$\|C_2\|^2 = \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$.
$\|C_3\|^2 = \left(\sqrt{6}/6\right)^2 + \left(\sqrt{6}/3\right)^2 + \left(\sqrt{6}/6\right)^2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1$.
Donc $M \in \mathscr{O}(3)$.

Exercice

$\mathcal{O}(n)$ est compact.

3 Lien avec les isométries

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \mathcal{O}(E)$

(ii) Dans TOUTE b.o.n., la matrice de u est orthogonale

(iii) Il existe UNE b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale

Démonstration

Rappelons que si A est la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout (i,j), $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E, $u(\mathcal{B})$ est encore une base orthonormale et pour tout (i,j),
$$\left(A^\intercal\right)_{i,j} = a_{j,i} = (e_j|u(e_i)) = (u^{-1}(e_j)|e_i) = \left(A^{-1}\right)_{i,j}$$
Donc $A^{-1} = A^\intercal$: A est orthogonale.
Autre justification possible : A est la matrice de passage de la b.o.n. $\mathcal{B}$ à la b.o.n. $u(\mathcal{B})$.
- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: évident.
- $(iii) \Longrightarrow (i)$: S'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice A de u est orthogonale, alors
$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|^2 = X^\intercal A^\intercal A X = X^\intercal X = \|x\|^2$$
donc u est une isométrie. $\square$

Remarque

- Si A est la matrice dans une b.o.n. de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors la matrice de u^{-1} dans cette même base est $A^{-1} = A^\intercal$.
- Être représenté par une matrice orthogonale en base *orthogonale* seulement ne suffit pas : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique (e_1, e_2), l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, 2e_2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme !) bien que A soit une matrice orthogonale.

4 Structure

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe appelé ***groupe orthogonal d'ordre*** n*. C'est même un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration

On montre facilement que $I_n \in \mathcal{O}(n)$, et si $M, N \in \mathcal{O}(n)$, $MN^{-1} = MN^\intercal \in \mathcal{O}(n)$ car
$$(MN^\intercal)^\intercal MN^\intercal = (N^\intercal)^\intercal M^\intercal MN^\intercal = N(M^\intercal M)N^\intercal = NI_nN^\intercal = NN^\intercal = I_n.$$
On peut aussi voir $\mathcal{O}(n)$ comme l'image du groupe $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ par le morphisme de groupe $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. $\square$

Remarque

On a un isomorphisme de groupes, si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de l'espace euclidien E de dimension n
$$\left|\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{O}(n), \times) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}\right.$$

5 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété

Soient, dans un espace euclidien E, $\mathscr{B}$ une b.o.n., $\mathscr{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

$\mathscr{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme de E représenté par la matrice P dans la base $\mathscr{B}$.

Alors $u(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$: si $\mathscr{B}'$ est un b.o.n., on a déjà vu que $P^{-1} = P^\mathsf{T}$, et on le retrouve en remarquant que u transforme une b.o.n. en b.o.n. donc est orthogonal donc P est une matrice orthogonale, et réciproquement, si P est orthogonale, u l'est et l'image $\mathscr{B}'$ de la b.o.n. $\mathscr{B}$ par u est une b.o.n. □

Remarque

Rappel : Changement de b.o.n. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux b.o.n. de E euclidien, $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^\mathsf{T}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P$$

6 Isométries positives et négatives

Propriété

*Les applications et les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1. **La réciproque est fausse.***

Démonstration

$\det(A^\mathsf{T} A) = 1$.

Contre exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Définition : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathscr{SO}(n)$ ou $\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif (+1), dites **matrices orthogonales positives**. Il est parfois noté $\mathscr{O}^+(n)$.

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives.** Les ensemble est $\mathscr{O}^-(n)$.

Définition : Rotations

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** E, noté $\mathscr{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif (+1), appelées **isométries positives** ou **rotations de** E. Il est parfois noté $\mathscr{O}^+(E)$. On parle aussi d'**isométries directes**.

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Démonstration : groupe

noyau du déterminant. □

Remarque

Attention, il ne suffit pas d'être de déterminant 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de rotation.

Propriété

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalentes :

(i) *u isométrie directe (rotation) de E.*

(ii) *u transforme toute bond en bond.*

(iii) *u transforme une bond en bond.*

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$: u transforme une bond $\mathscr{B}$ en bon car orthogonal. Puis $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) > 0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: u orthogonale et $\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) > 0$. □

Propriété

Toute réflexion d'un espace euclidien orienté est une isométrie indirecte.

VIII Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

1 Définition

Définition

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (u(x)|y) = (x|u(y))$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, noté $\mathscr{S}(E)$.

Exercice

$\mathscr{S}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarques

R 1 – Ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie !

R 2 – La linéarité est en fait automatique (exercice).

2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

Propriété

Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormale** *de l'espace euclidien E, $u \in \mathscr{L}(E)$.*
u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, pour tout (i, j), $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$. □

Remarque

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on peut montrer qu'il existe un unique endomorphisme v tel que pour tout x, y, $(u(x)|y) = (x|v(y))$, appelé adjoint de u.

On démontre alors comme ci-dessus, que la matrice de v en base orthonormale est la transposée de celle de u : c'est l'interprétation géométrique de la transposition de matrices.

Ainsi, pour un endomorphisme symétrique, $v = u$ et pour un endomorphisme orthogonal (isométrie), $v = u^{-1}$.

3 Cas des projections

Propriété

Soit p un projecteur ($p \circ p = p$).
Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$) si et seulement s'il est symétrique.

Remarque

P la matrice de p en **base orthonormale**. Alors p projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P$ et $P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Si p est orthogonal, $x, y \in E$, alors $(p(x)|y) = (p(x)|p(y)) + ((p(x)|y - p(y)) = (p(x)|p(y)) = (p(y)|x) = (x|p(y))$ par symétrie des rôles de x et y.

Si p est un projecteur symétrique, $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y = p(x') \in \operatorname{Im} p$, $(x|y) = (x|p(x')) = (p(x)|x') = (0_E|x') = 0$ donc p projecteur orthogonal. □

4 Sous-espaces stables

Propriété

Si $u \in \mathscr{S}(E)$ et F stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est.

Démonstration

Si $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$, $(u(x)|y) = (x|u(y)) = 0$ donc $u(x) \in F^{\perp}$. □

5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

E désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

Théorème : spectral

Si $u \in \mathscr{S}(E)$, alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de u.

Théorème : spectral

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormale : si $u \in \mathscr{S}(E)$, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème : spectral

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathscr{O}(n)$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{\intercal} = PDP^{-1}.$$

Remarque

P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de vecteurs propres de endomorphisme canoniquement associé à A.

Démonstration

Remarquons déjà que le fait que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes soient orthogonaux va être une conséquence de l'orthodiagonalisatibilité, mais peut se voir aussi directement : si $\lambda, \mu \in \operatorname{Sp} u$ avec $\lambda \neq \mu$, $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$.

Alors $\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y)$ et comme $\lambda \neq \mu$, $(x|y) = 0$.

Passons maintenant aux choses sérieuses.

Lemme

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors $\operatorname{Sp} u \neq \varnothing$.

Démonstration

On sait que u admet une valeur propre complexe λ. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans cette base.

On a donc $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

On remarque astucieusement que $X^\intercal \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$.

On calcule ensuite $\lambda X^\intercal \overline{X} = (\lambda X)^\intercal \overline{X} = AX^\intercal \overline{X} = X^\intercal A^\intercal \overline{X} = X^\intercal A\overline{X} = X^\intercal \overline{AX} = \overline{\lambda} X^\intercal \overline{X}$ et donc $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Et on démontre le théorème en raisonnant par récurrence sur la dimension de E.

Si E est de dimension 1, il n'y a rien à faire.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout endomorphisme symétrique d'un espace de dimension n soit orthodiagonalisable. Soit E un espace de dimension $n+1$ et $u \in \mathscr{S}(E)$.

On sait que u admet une valeur propre et donc un vecteur propre $x \in E \setminus \{0_E\}$. Soit $D = \operatorname{Vect} x$.

Alors D est stable par u et donc $D^\perp$ l'est aussi d'après une propriété vu précédemment.

Soit v l'endomorphisme induit par u sur $D^\perp$, espace euclidien de dimension n. La symétrie de u se transmet à v par restriction. Donc v est orthodiagonalisable par hypothèse de récurrence. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de v. Ce sont aussi des vecteurs propres de u.

Enfin, $\left(e_1, \dots, e_n, \frac{1}{\|x\|} x\right)$ est une base adaptée à la décomposition $E = D \overset{\perp}{\oplus} D^\perp$, orthonormale, formée de vecteurs propres de u, ce qui établit la récurrence. □

Remarque

C'est faux pour une matrice complexe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ symétrique complexe non diagonalisable.

C'est vrai dans $\mathbb{C}$ pour des matrices telles que $A^\intercal = \overline{A}$ mais c'est hors-programme.

Exercice : CCINP 68

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :**
   (a) **sans calcul,**
   (b) **en calculant directement le déterminant det$(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,**
   (c) **en utilisant le rang de la matrice,**
   (d) **en calculant A^2.**
2. **On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.**

---

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

(b) On obtient $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.

$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.

Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.

(c) rg$A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
Puisque tr$A = 3$ et que tr$A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.

(d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.

2. On note $e = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.

$E_3(f) = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
Donc $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
$\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
On les normalise et on pose $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.
Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.
On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Exercice : Matrices symétriques positives ou définies positives : très Classique !

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est positive lorsque $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}^+$ et on note $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On dit que A est définie positive lorsque $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}_*^+$ et on note $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. **Montrer que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\quad X^\top AX \geqslant 0$ (respectivement > 0).**
2. **Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\top M$.**
3. **Racine carrée : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$.**
   Que dire de B si A est supposée définie positive ?
4. **Décomposition polaire : Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\top A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe $(Q, S) \in \mathscr{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.**
   Remarques :
   - ***on peut montrer que cette décomposition est unique.***
   - ***la densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la compacité de $\mathscr{O}(n)$ (à savoir montrer...) permettent d'étendre ce résultat à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité).***

---

1. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Par théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et D diagonale dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$M = PDP^{-1} = PDP^T$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\, M\, X \geqslant 0 &\Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\, PDP^T\, X \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T DY \geqslant 0 \end{aligned}$$

car l'application $X \mapsto P^T X$ est une bijection de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans lui-même (un automorphisme, même), de réciproque $Y \mapsto PY$. Or, avec des notations « évidentes »,

$$Y^T DY = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

et $\mathrm{Sp}(M) = \{d_i\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Si tous les d_i sont positifs, alors $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad Y^T DY \geqslant 0$, et réciproquement, en prenant les Y dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Pour la défini-positivité, c'est quasiment la même preuve que pour la caractérisation de la positivité, quelques inégalités strictes à la place d'inégalités larges, seulement.

2. $M = \Delta P^\mathsf{T}$ où Δ comme ci-dessous convient.
3. **Racine carrée** : Par théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ (i.e. diagonale) telles que
$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$
Et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ (notation non officielle...) où les λ_i sont les valeurs propres de$D$, donc de A. Donc les λ_i sont positifs, et, en posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$ on obtient une matrice symétrique (deuxième forme) et à valeurs propres positives (première forme) telle que $B^2 = A$.
Si A est définie positive, elle est dans $GL_n(\mathbf{R})$ (elle n'a pas 0 pour valeur propre), donc B aussi (prendre le déterminant, ou encore dire que $A^{-1}BB = I_n$), donc B, étant déjà positive, est définie positive.
4. **Décomposition polaire** : $A^\mathsf{T} A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,
$$X^\mathsf{T}(A^\mathsf{T} A)X = Y^\mathsf{T} Y \qquad \text{où } Y = AX$$
Or, si $X \neq (0)$, $AX \neq (0)$, or si $Y \neq (0)$, $Y^\mathsf{T} Y > 0$.
En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique définie positive telle que
$$S^2 = A^T A$$
Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule
$$Q^T Q = (S^{-1})^T A^T AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$
Donc Q est orthogonale.

Exercice : Formules variationnelles : très Classique !

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que l'application
$$x \longmapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$$
atteint sur $E\setminus\{0_E\}$ un minimum et un maximum, les exprimer en fonction des valeurs propres de u.
Traduire ce résultat matriciellement.

Par théorème spectral, on fixe une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de E composée de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i$. Il n'est pas restrictif de supposer $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Et alors, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a
$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$
donc
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant (x|u(x)) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$
l'inégalité de gauche est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E$, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$. Donc il y a un minimum et un maximum, qui sont $\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(A))$ et $\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(A))$. Pour les matrices symétriques réelles, même chose en considérant le quotient
$$\frac{X^T\ A\ X}{X^T\ X}$$
X parcourant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$.

IX Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

Propriété

Si u est une isométrie de E et F stable par u, alors $F^\perp$ l'est.

Lemme

Si u est une isométrie de E, alors u possède une droite ou un plan stable.

Démonstration

Soit u admet une valeur propre réelle et par définition elle admet une droite stable.

Soit $\mathrm{Sp}\, u = \varnothing$, le polynôme minimal π_u de u n'a pas de racine réelle, donc possède un facteur irréductible de degré 2, $P_0 = X^2 + aX + b$: $\pi_u = (X^2 + aX + b)Q$ avec $Q(u) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a donc $x \in E$ tel que $y = Q(u)(x) \neq 0_E$.

On a alors $P_0(u)(y) = P_0(u) \circ Q(u)(x) = \mu_u(u)(x) = 0_E$.

On montre que $F = \mathrm{Vect}(y, u(y))$ est un plan stable par u.

C'est un plan car $y \neq 0_E$ et n'est pas vecteur propre de u.

Puis $u^2(y) = P_0(u)(y) - au(y) - by = -au(y) - by \in F$. □

Lemme

Si u est une isométrie de E, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Remarque

L'inclusion peut être stricte.

Démonstration

Si on a $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors $\|u(x)\| = \|x\| = |\lambda|\,\|x\|$ donc $|\lambda| = 1$. □

Théorème : Réduction des isométries

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, des entiers naturels m, p, q, des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

où, pour tout réel θ,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarques

R 1 – Avec ces notations, u est une rotation si et seulement si p est pair.

R 2 – En remarquant que $R_\pi = -I_2$, on voit qu'on peut supposer $p \in \{0, 1\}$.

Théorème : Version matricielle

Soit M une matrice orthogonale ($M \in \mathscr{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathscr{O}(n)$ et une matrice Q de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^T$.

Démonstration

Par récurrence sur la dimension de E.

Initialisation : Si $\dim E = 1$, alors dans toute base orthonormale, u est représentée par une matrice de la forme (± 1) qui est bien de la forme voulue.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le théorème soit vrai pour des espaces euclidiens de dimension au plus n, et soit E un espace euclidien de dimension au plus $n+1$.

Soit u possède une droite stable, on pose e_1 vecteur propre unitaire associé à une valeur propre, nécessairement ± 1, $D = \operatorname{Vect} e_1$, et $D^\perp$ est encore stable par u.

Alors $E = D^\perp \oplus D$ et dans une base adaptée (que l'on peut choisir orthonormale), la matrice de u est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice dans une base orthonormale de $D^\perp$ de l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $D^\perp$ qui est encore une isométrie car conserve toujours la norme.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et choisir la base en question de telle manière que A est la forme voulue.

Reste alors à éventuellement échanger deux vecteurs dans la base (si la valeur propre est -1) pour obtenir une matrice de u de la forme voulue.

Soit u ne possède pas de droite stable, donc pas de valeur propre réelle, mais alors il possède un plan stable P d'après le lemme préliminaire.

Dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $P \oplus P^\perp = E$, la matrice de u est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où, comme dans le cas précédent, R et A sont de la forme voulue. Mais comme R est orthogonale en dimension 2, elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ. Seule la première n'admet aucune valeur propre réelle ce qui permet de conclure. □

X Cas des dimensions 2 et 3

1 Isométries en dimension 2

Propriété : Description de $\mathcal{O}(2)$

$\mathcal{O}(2) = \mathscr{SO}(2) \sqcup \mathcal{O}^-(2)$ avec

$$\mathscr{SO}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque

Expression complexe, en passant par la base canonique $(1, \mathrm{i})$: $r_\theta(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ et $s_\theta(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z}$.

Propriété

Le groupe $(\mathscr{SO}(2), \times)$ est commutatif.

Remarque

C'est faux en dimension quelconque.

Propriété

Soit E euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathscr{SO}(E)$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe, la matrice de r soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

*On dit que r est la **rotation vectorielle d'angle de mesure θ**.*

Démonstration

Si R_θ et R_ϕ sont des matrices de r en base orthonormale, alors on a $P \in \mathscr{SO}(2)$ tel que $R_\theta = PR_\phi P^{-1}$. Comme $\mathscr{SO}(2)$ est commutatif, $R_\theta = R_\phi$. □

Propriété

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs non nuls de E. Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ et $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Démonstration

Il suffit de passer par les complexes dans une bond. □

Définition : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π.

Propriété

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2.

(i) $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

(ii) $[\vec{x}, \vec{y}] = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sin\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$.

Propriété

Les isométries directes conservent les angles orientés tandis que les isométries indirectes les changent en leur opposé.

Démonstration

Avec le produit scalaire et le produit mixte. □

Propriété : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- *Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta} z$.
- *Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est*
$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta}\bar{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.

Démonstration

- $z' = e^{i\theta} z$ s'interprète comme une rotation vectorielle.
- $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ est une involution donc une symétrie vectorielle.

$$z' = z \iff e^{-i\theta/2} z \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}e^{i\theta/2}$$

et

$$z' = -z \iff e^{-i\theta/2} z \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}e^{i(\theta/2+\pi/2)} = \left(\mathbb{R}e^{i\theta/2}\right)^{\perp}$$

Donc il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (donc réflexion) dirigée par $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$. □

Méthode : Étudier une isométrie en dimension 2...

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont orthoNORMées).

Elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ.

- Soit elle est de la forme R_θ, c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation.
- Soit elle est de la forme S_θ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

2 Isométries en dimension 3

Propriété : Description des isométries en dimension 3

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$.

(i) *Soit $u = r \in \mathcal{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \mathrm{id}_E$, et alors $\dim\operatorname{Ker}(r - \mathrm{id}) = 1$ et $D = \operatorname{Ker}(r - \mathrm{id})$ est appelé* ***axe de la rotation****.*

On fixe a unitaire dirigeant D et (e_1, e_2) une base orthonormale de $P = D^\perp$. (e_1, e_2) est dite directe lorsque (e_1, e_2, a) l'est. On dit que D ***est dirigée et orientée par a****.*

On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe (e_1, e_2, a) adaptée à la décomposition $E = D^\perp \oplus D$, la matrice de r est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On dit que θ ***est une mesure de l'angle de la rotation r (modulo 2π).***

(ii) *(Hors-Programme) Soit $u \in \mathcal{O}^-(E)$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *composée commutative d'une rotation de matrice* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et d'une réflexion de matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).*

Remarque

Et finalement, les isométries sont id_E, les rotations, les anti-rotations dont les réflexions font partie, et $-\mathrm{id}_E$ (symétrie centrale).

Démonstration

On utilise le théorème de réduction des isométries.
Comme on est en dimension impaire, il y a nécessairement une valeur propre réelle, donc nécessairement ± 1.

On a alors nécessairement une base orthonormale dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (le bloc haut-gauche pouvant être éventuellement $\pm I_2$).

Si $u = r$ rotation, son déterminant vaut 1 et la matrice devient $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et 1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3 (car $\chi_r \in \mathbb{R}[X]$).

Si $r \neq \mathrm{id}_E$, $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E)$ est donc bien de dimension 1, et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice dans n'importe quelle base orthonormale directe de la rotation induite par r sur $P = D^{\perp}$ (c'est toujours une isométrie, elle est de déterminant 1).

D'où la bonne définition de l'angle de la rotation. □

Propriété

Soit r est une rotation de E espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de id_E,.

- *Son axe est l'ensemble de ses vecteurs invariants.*
- *Si θ est une mesure de son angle, alors $\operatorname{tr} r = 2\cos\theta + 1$.*
- *Le signe de $\sin\theta$ est celui du produit mixte $[x, r(x), a]$ où a est un vecteur directeur orientant l'axe (non nécessairement unitaire) et x un vecteur n'appartenant pas à l'axe (en général pris dans la base canonique).*

Démonstration

Les deux premiers points sont faciles.
Pour le troisième, dans une base orthonormale directe $(e_1, e_2, a/\|a\|)$,

$$[x, r(x), a] = \begin{vmatrix} x_1 & \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2 & 0 \\ x_2 & \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2 & 0 \\ x_3 & x_3 & \|a\| \end{vmatrix} = \|a\| \left(x_1^2 + x_2^2\right) \sin(\theta) \quad \square$$

Méthode : Étude d'isométries en dimension 3

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariant, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\mathrm{id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$: après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.

Exercice

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$a = (1,1,1)$ dirige l'axe de la rotation.
Son orthogonal est $P : x + y + z = 0$ dirigé par $b = (1,0,-1)$ et $c = (1,-2,1)$, ils sont orthogonaux.

D'où une base orthonormale adaptée de $\mathbb{R}^3$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$.

Dans cette base, la matrice de la rotation est $M = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice recherchée est alors $PMP^\intercal$ où $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a\right)$.

La matrice recherchée est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice

Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes sont orthonormés $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ avec la première coordonnée : c'est une matrice de rotation.
On calcule les vecteurs invariants, on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $a = (1, 0, -4)$ dirige et oriente l'axe de la rotation.
Puis $\operatorname{tr} M = -7/9 = 2\cos\theta + 1$ donc $\cos\theta = -8/9$.
Et le signe de $\sin\theta$ est celui de $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} < 0$.
Donc rotation d'angle $-\operatorname{Arccos}(-8/9)$.