$\mathbb{C}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients complexes, $\mathbb{R}[X]$ le sous-anneau des polynômes à coefficients réels.

Soit n un entier strictement positif ; on considère le polynôme :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

1°/ Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$.

Préciser le degré de P_n et le coefficient du terme de plus haut degré.

2°/ Calculer les racines de P_n.

3°/ Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P_n(X) = Q_n(X^2) .$$

Donner la décomposition de Q_n dans $\mathbb{R}[X]$.

4°/ a) Calculer la somme S_n définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} .$$

(cot désigne la cotangente)

b) Calculer la somme T_n définie par : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

5°/ Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cot^2 x \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x} .$$

6°/ Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} .$$

En utilisant ce qui précède, montrer que la suite $(u_p)_{p\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.