Vrai ou faux

1. S'il existe une suite (u_n) convergeant vers a telle que $f(u_n) \to \ell$, alors f admet ℓ comme limite en a.
2. Pour que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to F$ admette une limite en $(0,0)$, il suffit que les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ convergent vers la même limite.
3. Toute application continue est uniformément continue.
4. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
5. Une application linéaire est toujours continue.

1. Exercices cherchés en cours

1 Étudier les limites en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ et $g : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{|x-y|}$.

Solution de 1 :

$f(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: s'il y a une limite, c'est 0. $f(0,y) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ aussi mais cela ne suffit pas !

$|f(x),y)| \leqslant |x|+|y| \to 0$.

Autre méthode : changement de variable en polaire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \to 0$.

$g(0,y) \to 0$ et $g(x, x+x^2) \to 1$ donc pas de limite (par composition ou par caractérisation séquentielle).

2 Étudier la continuité de $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{|x|+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Solution de 2 :

f est discontinue en $(0,0)$ malgré la continuité des applications partielles, mais continue ailleurs par opérations.

g est discontinue en $(0,0)$ vu les applications partielles, mais continue ailleurs par opérations.

3 Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4 **CCINP 41** Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.

2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

Solution de 4 : CCINP 41

1. Soit E et F deux espaces vectoriels normés.
   Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue.
   L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E.
   Exemple : $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto xy \end{array}$.
2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit $F \subset E$.
   F est un fermé de E si et seulement si $\complement_E F$ est un ouvert de E.
   Exemple : $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \geqslant 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car $\complement_{\mathbb{R}^2} B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   En effet, $\complement_{\mathbb{R}^2} B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 < 1\right\} = B_o(0, 1)$ où $B_o(0, 1)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
   Puis, comme toute boule ouverte est un ouvert, on en déduit que $\complement_{\mathbb{R}^2} B$ est un ouvert.
3. Caractérisation séquentielle des fermés :
   Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.
   A est un fermé de E si et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, alors $x \in A$.
   Exemple : $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geqslant 1\right\}$ est un fermé.
   En effet, soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de C qui converge vers (x, y).
   $\forall \ n \ \in \mathbb{N}$, $x_n y_n \geqslant 1$, donc, par passage à la limite, $xy \geqslant 1$ donc $(x, y) \in C$.
4. Une intersection de fermés d'un espace vectoriel normé E est un fermé de E.
   Exemple : $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\right\}$.
   On pose $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geqslant 1\right\}$ et $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 0\right\}$.
   D'après 3., D_1 est un fermé.
   D_2 est également un fermé.
   En effet, D_2 est l'image réciproque du fermé $[0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x \end{array}$.
   On en déduit que $D = D_1 \cap D_2$ est un fermé de E.

Remarque :
On peut aussi utiliser le fait qu'un produit de compacts est un compact et qu'un ensemble compact est fermé.
Exemple : $E = [0; 1] \times [2; 5]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
En effet, comme $[0; 1]$ et $[2; 5]$ sont fermés dans $\mathbb{R}$ et bornés, ce sont donc des compacts de $\mathbb{R}$.
On en déduit que E est un compact de $\mathbb{R}^2$ donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.

5 **CCINP 35** E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Solution de 5 : CCINP 35

1. Prouvons que $P1. \Longrightarrow P2.$.
   Supposons f continue en a.
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers a. Prouvons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Par continuité de f en a, $\exists\, \alpha > 0$ / $\forall x \in E, \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$. (*)
   On fixe un tel α strictement positif.
   Par convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - a\| \leqslant \alpha$.
   On fixe un N convenable.
   Alors, d'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

   On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Prouvons que $P2. \Longrightarrow P1.$

   Supposons $P2.$ vraie.
   Raisonnons par l'absurde en supposant que f non continue en a.
   C'est-à-dire $\exists\, \varepsilon > 0$ / $\forall\, \alpha > 0$, $\exists\, x \in E$ tel que $||x - a|| \leqslant \alpha$ et $||f(x) - f(a)|| > \varepsilon$.
   On fixe un tel ε strictement positif.
   Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\alpha = \dfrac{1}{n}$, il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n - a|| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $||f(x_n) - f(a)|| > \varepsilon$. (*)
   Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n - a|| \leqslant \dfrac{1}{n}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite converge vers a.
   Donc, d'après l'hypothèse, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(a)$.
   Donc $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow ||f(x_n) - f(a)|| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Ainsi, on obtient une contradiction avec (*).

2. Soit $x \in E$.
   Puisque la partie A est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = g(x_n)$.
   Et en passant à la limite, sachant que f et g sont continues sur E, on obtient $f(x) = g(x)$.

6 **CCINP 36** Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
Démontrer que φ est linéaire et continue.

Solution de 6 : CCINP 36

1. P1 $\Rightarrow$ P2 de manière évidente.
Prouvons que P2 $\Rightarrow$ P3.

   Supposons f continue en 0_E.
Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x - 0_E\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(0_E)\| \leqslant 1$.
Soit $x \in E$

   Si $x \neq 0_E$, posons $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|}x$. Puisque $\|y\| = \alpha$, on a $\|f(y)\| \leqslant 1$.

   Donc, par linéarité de f on obtient $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x\|$.
Si $x = 0_E$ l'inégalité précédente est encore vérifiée.

   En prenant alors $k = \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient le résultat voulu.

   Prouvons que P3 $\Rightarrow$ P1.

   Supposons que $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.
Comme f est linéaire, $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(y) - f(x)\| = \|f(y-x)\| \leqslant k\|y-x\|$.
La fonction f est alors lipschitzienne, donc continue sur E.

2. L'application φ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale et continue car :
$\forall f \in E$, $|\varphi(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^1 \|f\|\mathrm{d}t = \|f\|$.

7 Montrer qu'une norme est 1-lipschitzienne.

Solution de 7 :
Conséquence de l'inégalité triangulaire (celle de gauche).

8

1. Montrer que $\varphi : f \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}), N_\infty) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est continue. Est-ce encore le cas avec la norme N_1 de la convergence en moyenne ?
2. Montrer que $f \in (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}), N_1) \mapsto f(0) \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est non continue.

Solution de 8 :

1. C'est une forme linéaire telle que pour tout f, $\varphi(f) \leqslant (b-a)N_\infty(f)$. C'est encore le cas avec N_1.
2. Considérer f_n telle que $f_n(0) = 1$ mais $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n}$ (par exemple un triangle : $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = 0$ si $x \geqslant \frac{2}{n}$ et f_n affine entre 0 et $\frac{2}{n}$) ou alors $f_n : x \mapsto x^n$

9 Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.

Solution de 9 :

1.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Si ℓ est valeur d'adhérence, φ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$, $\varepsilon > 0$, alors apcr $u_{\varphi(n)} \in B(\ell, \varepsilon)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Soit $\varepsilon > 0$, si $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est majoré et si $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ ne peut être vide, sinon l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ serait majoré par p et inclus dans $\mathbb{N}$ donc fini.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ n'est pas vide, on construit une suite extraite convergeant vers ℓ : on pose $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(0) \geqslant 0$ et $u_{\varphi(0)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^0}\right)$.
Puis $\varphi(1) \geqslant p = \varphi(0) + 1$ tel que $u_{\varphi(1)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^1}\right)$.
Et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant p = \varphi(n-1) + 1$ tel que $u_{\varphi(n)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^n}\right)$.
Alors φ est strictement croissante et, par construction, $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

2. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences de u. Montrons que ${}^cA$ est ouverte.
Si $x \in {}^cA$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\{n, u_n \in B(x, \varepsilon)\}$ est fini et donc aucun des élément de $B(x, \varepsilon)$ ne peut être valeur d'adhérence non plus, c'est-à-dire que $B(x, \varepsilon) \subset {}^cA$, ce qui signifie bien que ${}^cA$ est ouverte et que A est fermée.

10 **CCINP 13 (nouveau)**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] / \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E? Justifier.

Solution de 10 : CCINP 13 (nouveau)

1. Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si de toute suite à valeurs dans A on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.
C'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in A$.
Remarque : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant strictement croissante, on a, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie compacte de E.

   Montrons que A est une partie fermée de E.

   C'est-à-dire montrons que toute suite à valeurs dans A qui converge, converge dans A.

   Soit (u_n) une suite à valeurs dans A telle que (u_n) converge vers ℓ. A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell' \in A$.

   Or, (x_n) converge vers ℓ donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers ℓ, en tant que sous-suite de (x_n). Par unicité de la limite, $\ell' = \ell$.

   Or, $\ell' \in A$ donc $\ell \in A$.

3. Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé.

   Rappel : Soit B une partie de E. B est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in B, \|x\| \leqslant M$.

   Soit A une partie compacte de E. Montrons que A est une partie bornée de E.

   Raisonnons par l'absurde. Supposons que A est non bornée.

   C'est-à-dire, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A / \|x\| > M$.

   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / \|x_n\| > n \quad (*)$

   (x_n) est une suite à valeurs dans A et A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in A$.

   Donc, d'après $(*), \forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{\varphi(n)}\right\| > \varphi(n)$.

   Or $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.

   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{\varphi(n)}\right\| > n$.

   Donc, $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$.

   Absurde car $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est bornée.

4. Posons $S = S(0,1)$.

   (a) $\forall x \in S, \|x\| = 1$ donc S est bornée.

   Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ $\forall (x,y) \in E^2, |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$ donc f est 1-lipschitzienne.

   Donc f est continue sur E.

   Or, $S = f^{-1}(1)$ et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc S est une partie fermée de E, en tant qu'image réciproque par une application continue d'un fermé.

   (b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

   $\|X^n - X^m\|_1 = 2$

   Supposons que S soit une partie compacte.

   (X^n) est une partie compacte de E donc existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(X^{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in S$.

   Alors $\lim_{n\to+\infty} \left\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\right\|_1 = |\ell - \ell| = 0$ contredit $\left\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\right\|_1 = 2$.

   Donc S est non compact.

11 **Trèèèèès classique** Montrer que $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\}$ est compact.

Solution de 11 : Trèèèèès classique

On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.

Or $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^\intercal M$ (bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|^2 = \operatorname{tr}(M^\intercal M)$, on a $\mathcal{O}(n) \subset \overline{B}(0, \sqrt{n})$.

12 **Oral Mines** Montrer que la boule unité fermée de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

Solution de 12 : Oral Mines

$f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ est continue, de norme 1 et converge simplement vers $\delta_{\cdot,1}$. Si on pouvait en extraire une suite uniformément convergente, la limite devrait être continue.

2. Limites et continuité

13 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Calculer les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x+y} \qquad h : (x,y) \mapsto \frac{1-\cos(xy)}{y^2} \qquad j : (x,y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$$

$$g : (x,y) \mapsto \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \qquad i : (x,y) \mapsto \frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y} \qquad k : (x,y) \mapsto \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}$$

Solution de 13 :

- Pas de limite : $f\left(x, -x+x^2\right) \to -1 \neq 0 = f(x,0)$.
- Pas de limite : $f(x,x) = 2$ et $f(x,0) = 1$.
- $h(x,y) \sim \dfrac{x^2y^2}{2y^2} = \dfrac{x^2}{2} \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.
- $i(x,y) \to 1$ car $\dfrac{\sin y}{y} \to 1$.
- Avec des formules de trigonométrie (la formule hyperbolique est à redémontrer),

$$j(x,y) = \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} \sim \frac{\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = 1.$$

- $k(x,0) \to 1$ et $k(x,x) = -1$: pas de limite.

14 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes

$$f : (x,y) \mapsto \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x}$$

Solution de 14 :

- On prolonge en tout $(x_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $(x,y) \neq (x_0,x_0)$, par théorème des accroissements finis (dont cos vérifie bien les hypothèses), on a $c_{x,y}$ entre x et y tel que $f(x,y) = \cos' c_{x,y} = -\sin c_{x,y}$. Lorsque $(x,y) \to (x_0,x_0)$, $c_{x,y} \to x_0$ par encadrement et par continuité de sin, $f(x,y) \to -\sin x_0$.
  On prolonge f en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = -\sin x$.
  Attention, contrairement aux fonctions d'une seule variable, la continuité du prolongement n'est pas automatique.
  Mais il est automatiquement continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ et si $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$\star$ $f(x,y) = \dfrac{\cos x - \cos y}{x-y} \to -\sin x_0 = f(x_0,x_0)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$

$\star$ $f(x,x) = -\sin x \to -\sin x_0 = f(x_0,x_0)$

donc, avec le lemme du préambule, le prolongement est bien continu sur $\mathbb{R}^2$ entier.

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$ par opérations.

  Si $y_0 \in \mathbb{R}$, $g(x,y) = x + \dfrac{y^2}{x}$ n'a pas de limite pour $(x,y) \to (0,y_0)$ si $y_0 \neq 0$, et $g(x,0) \to 0$ pour $x \to 0$, $g\left(x^2, x\right) \to 1$ pour $x \to 0$ donc g n'a pas de limite en $(0,0)$ non plus.
  Il n'y a donc pas de prolongement de g par continuité.

15 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^3y + x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x \neq y, \\ |x| & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution de 15 :

- En polaires, $f(x,y) = r^2 \cos^4\theta \sin^4\theta \to 0 = f(0,0)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- g est continu en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ par opérations.

  Et si $x_0 \in \mathbb{R}$, Pour $y \neq 0$, $g(x,y) = \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} \to 1 + x_0 = g(x_0,0)$, et $g(x,0) = 1+x^2 \to 1+x_0^2 = g(x_0,0)$ donc, avec le lemme du préambule, g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- On remarque que $x^4 - 2x^3y + x^2y^2 = (x^2-xy)^2$, donc, si $x \neq y$, $h(x,y) = \operatorname{sgn}(x-y)\,|x|$.
  h est continue par opérations sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$.
  Si $x \neq 0$, $f\left(x, x+\frac{1}{n}\right) = -|x| \not\to |x| = f(x,x)$ donc f n'est pas continue en (x,x).
  En $(0,0)$, si $x \neq 0$, $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x-y)\,|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$ et $f(x,x) = |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0,0)$ donc avec le lemme du préambule, f en continue en $(0,0)$.

16 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

17 Soir $f : E \to E$ telle que $f(x) = x$ si $\|x\| < 1$ et $\dfrac{x}{\|x\|}$ sinon.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

3. Continuité des applications linéaires

18 **Un exemple de norme subordonnée** On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Δ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. On pose $M = \sup\limits_{u\in\ell^\infty(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \dfrac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$. Justifier l'existence de M et le calculer.

19 Soit u l'application de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(1)$.

1. Démontrer que u n'est pas continue si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_1.
2. L'application u est-elle continue si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_∞ ?

20 **Norme subordonnée d'une application linéaire**

On définit, si f est une application linéaire continue du $\mathbb{K}$-evn $(E, \|.\|_E)$ dans le $\mathbb{K}$-evn $(F, \|.\|_F)$,

$$|||f||| = \sup\left(\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\}\right) = \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

1. Montrer que $|||.|||$ est bien définie.
2. Montrer que, si $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ (espace des applications linéaires continues de E dans F),
$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$
3. Montrer que $|||f|||$ est le plus petit k tel que, pour tout $x\in E$, $|||f(x)|||_F \leqslant k\|x\|_E$
4. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$
5. Ici $E = F$, $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}_c(E)$. Calculer $|||\mathrm{Id}|||$ et montrer que $\forall (u,v)\in\mathcal{L}_c(E)^2,\ |||v\circ u||| \leqslant |||u|||\ |||v|||$

Solution de 20 : Norme subordonnée d'une application linéaire

1. $\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\}$ est, si f est une application linéaire continue, majoré (par caractérisation de la continuité des applications linéaires). C'est un ensemble non vide (en supposant bien sûr, ce qui est implicite, que $E\neq\{0_E\}$). D'où le bonne définition.

---

2. Il suffit de remarquer que
$$\begin{aligned}\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\} &= \left\{\left\|f\left(\frac{1}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F\ ;\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\}\\ &= \{\|f(y)\|_F\ ;\ y\in S(0_E,1)\}\end{aligned}$$

où $S(0_E,1)$ est la sphère unité de E.

---

3. Les lignes suivantes sont équivalentes :
   $\forall x \in E \qquad |||f(x)|||_F \leqslant k\|x\|_E$
   $\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad |||f(x)|||_F \leqslant k\|x\|_E$
   k majore $\left\{ \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \; ; \; x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$
   La borne supérieure d'un ensemble étant son plus petit majorant, on conclut. *Cette propriété est bien utile dans la pratique.*

---

4. On a vu que |||.||| était bien définie sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, et elle est bien clairement à valeurs dans **R**$^+$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ (rappelons que $\mathbb{K}$ est$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   $$\forall x \in E \quad \|(\lambda f)(x)\|_F = |\lambda| \; \|f(x)\|_F \leqslant |\lambda| \; |||f||| \; \|x\|_E$$
   (par 3.) et donc, encore par 3., $|||\lambda f||| \leqslant |\lambda| \; |||f|||$. Inégalité que l'on peut appliquer en remplaçant f par λf et λ par $1/\lambda$, si du moins $\lambda \neq 0$ (mais si $\lambda = 0$, il n'y a rien à faire, on peut donc exclure ce cas). On obtient alors l'homogénéité.
   Soit f et g dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors
   $$\forall x \in E \quad \|(f+g)(x)\|_F \leqslant \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leqslant (|||f||| + |||g|||) \; \|x\|_E$$
   D'où, encore grâce à 3, l'inégalité triangulaire. Pour finir, $|||f||| = 0 \Rightarrow f = \Theta$ est bien simple.

4. Continuité et topologie

21 Topologie matricielle

1. Montrer de deux manières différentes que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices symétriques sont fermés.
4. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(n)$ des matrices orthogonales est fermé.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.
6. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense ?
   On pourra considérer l'application qui à une matrice 2×2 associe le discriminant de son polynôme caractéristique.
7. Montrer que l'ensemble des matrice de rang $p \in [\![1, n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p = 0$ et $p = n$.

Solution de 21 : Topologie matricielle

1. 1re méthode : pour k assez grand, $\dfrac{1}{k}$ n'est pas valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car le nombre de valeurs propres est fini. Alors $M_k = M - \dfrac{1}{k} I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $M_k \to M$.

2e méthode : on a P, Q inversibles telles que $M = PJ_rQ$ avec $r = \text{rg}\, M$. On pose $J_{r,k} = J_r + \dfrac{1}{k} I_n$. Alors $J_{r,k}$ est inversible et $J_{r,k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} J_r$. Par continuité de l'application linéaire en dimension finie $A \mapsto PAQ$, $(M_k)_k = (PJ_{r,k}Q_k$ est une suite de matrices inversibles telles que $M_k \to M$.

On vérifie que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si A est inversible car $AB = A(BA)A^{-1}$ et le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Donc $A \mapsto \chi_{AB} - \chi_{BA}$ est nulle sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et continue car les cœfficients du polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ sont polynomiaux en ceux de A.

Autre argument : si (A_k) suite de matrices inversibles convergeant vers A, alors pour tout k, $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$, puis $A_kB \to AB$ et $BA_k \to BA$ car $A \mapsto AB$ et $B \mapsto BA$ sont linéaires en dimension finie (au départ) donc continues. Et $A \mapsto \chi_A = \det(XI_n - A)$ est continue car les cœfficient du polynôme caractéristiques sont polynomiaux en ceux de A.

Donc avec $k \to +\infty$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ image réciproque d'un ouvert par une application continue (car polynomiale).
3. Soit $\varphi_{i,j} : A \mapsto a_{i,j}$, linéaire donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigcap_{1\leqslant j<i\leqslant n} \varphi_{i,j}^{-1}(\{0\})$ fermé comme intersection (finie) de fermés.

   Soit $u : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^\intercal - A$ définie sur un espace de dimension finie et linéaire donc continue. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = u^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par cette application.
4. $f : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \mapsto AB^\intercal$ est continue car bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc $A \mapsto AA^\intercal$ l'est aussi par composition.

   $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(\{I_n\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M est trigonalisable : on peut écrire $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire, avec sur la diagonale les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

   Soit, pour $k \geqslant 1$, $T_k = T + \text{diag}\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{n}{k}\right)$.

   Il n'y a qu'un nombre fini de k pour lesquels on ait $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k}$ avec $i \neq j$ (ce qui revient à $\frac{1}{k} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{i-j}$), on est sûr à partir d'un certain rang que T_k possède n valeurs propres distinctes en dimension n, donc est diagonalisable. C'est donc aussi le cas de $M_k = PT_kP^{-1}$.

   Or $M_k \to M$ car $T_k \to T$ et $A \mapsto PAP^{-1}$ linéaire sur un espace de dimension finie donc continue.

   D'où la densité.
6. $\Delta : M \mapsto$ le discriminant de χ_M est continue car polynomiale en les cœfficients de M.

   Tout matrice diagonalisable M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a des racines réelles donc $\Delta(M) \geqslant 0$. Ainsi, tout matrice M limite d'une suite de matrices diagonalisable vérifie aussi $\Delta(M) \geqslant 0$.

   Or il existe des matrices réelles sans valeur propre réelle, d'où l'absence de densité.
7. Montrer que l'ensemble des matrices de rang $p \in [\![1, n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p = 0$ et $p = n$.

22 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse est continue.

Solution de 22 :

Formule de la comatrice !

23 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son polynôme minimal n'est pas continue.

Solution de 23 :

Construire par exemple une suite de matrices diagonalisables simples tendant vers la matrice nulle.

24 **Autour de la distance à une partie** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Pour A partie de non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Rappeler pourquoi $d(x, A)$ est bien définie et $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
2. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \left\{x \in E,\ d(x, A) < \dfrac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que A_n est ouvert.
   (b) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.
   (c) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable (ie indexée par des entiers) d'ouverts.
   (d) Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
4. **Cas où la distance à un fermé est convexe**
   On suppose que F est une partie non vide fermée de E et que $x \mapsto d(x, F)$ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$, $d(tx + (1-t)y, F) \leqslant td(x, F) + (1-t)d(y, F)$.
   Prouver que F est convexe.
5. **Tout espace vectoriel normé est séparé et normal** On suppose que F_1 et F_2 sont des fermés non vides disjoints de E.
   (a) E est **séparé** [1] : c'est le cas où F_1 et F_2 sont des singletons. Si $x_1 \neq x_2$, montrer qu'on peut trouver des ouverts U, V disjoints de E tels que $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$.
   (b) Montrer qu'il existe une application continue $f : E \to [0, 1]$ telle que $F_1 = f^{(-1)}(\{1\})$ et $F_2 = f^{(-1)}(\{0\})$.
   On pourra construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \mapsto d(x, F_1)$ et $x \mapsto d(x, F_2)$.
   (c) E est **normal** : Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.
   On pourra introduire $\varphi : x \mapsto d(x, F_1) - d(x, F_2)$.

25 **Caractérisations de la continuité** Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.
3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
4. Pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
5. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.
6. Pour toute partie C de F, $\mathrm{Fr}\left(f^{-1}(C)\right) \subset f^{-1}\left(\mathrm{Fr}(C)\right)$.

1. C'est cet axiome qui garantit l'unicité de la limite.

5. Compacité

26 Montrer que la sphère unité de $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |p_k|$ n'est pas compacte.

On pourra utiliser la suite $(X^n)_n$.

27 **Écrits Mines** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{AQ, Q \in \mathcal{O}(n)\}$ est compact.

Solution de 27 : Écrits Mines

C'est image du compact $\mathcal{O}(n)$ par l'application continue $Q \mapsto AQ$ car linéaire en dimension finie.

28 **Classique – Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue**

Montrer que si K est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Solution de 28 : Classique – Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue

Sinon, supposons $K \neq \varnothing$. On a $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x_0, \ldots, x_n$, $K \not\subset \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Donnons-nous $x_0 \in K$. puis $x_1 \in K$ tel que $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$. Puis $x_2 \notin \bigcup_{i=0}^{1} B(x_i, \varepsilon)$.

Et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{K}$ tel que $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$.

On a alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geqslant \varepsilon$.

Or on peut extraire de (x_n) une suite convergente, ce qui est contradictoire.

29 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ des points de E, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

On appelle **enveloppe convexe** de A l'ensemble des barycentres de ses points à cœfficients positifs. Notons-la Conv(A).

1. Montrer que $K = \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que Conv(A) est compacte.

Solution de 29 :

1. Fermé (image réciproque continue d'une fermé) et borné est dimension finie.
2. Image continue de K.

30 **Diamètre d'une partie bornée**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E.

1. Justifier l'existence de $D = \sup \left\{ \|x-y\|\,,\ (x,y) \in A^2 \right\}$. On dit que D est le diamètre de A.
2. Démontrer que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $D = \|a-b\|$.
3. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le diamètre de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Solution de 30 : Diamètre d'une partie bornée

1. Partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ car A est borné.
2. $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est un fonction continue (car lipschitzienne, en prenant la norme produit sur A^2) sur le compact A^2 donc atteint un maximum.
3. $2r$: par IT, $\|x-y\| \leqslant 2r$ et il est facile de voir que cette borne est atteinte.

31 Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, ℓ sa limite. Montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Solution de 31 :

Soit $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. On montre que K est une partie fermée et bornée de E.
La suite étant convergente, elle est bornée donc K l'est.
Si $x \notin K$, $u_n \not\to x$ donc on a $\varepsilon > 0$ tel que à partir d'un certain rang N, $u_n \notin B(x,\varepsilon)$, et alors, nécessairement, $\ell \notin B(x,\varepsilon)$.
Puis, comme $x \notin K$, en prenant ε' strictement inférieur à ε et au minimum des $\|x-u_n\|$ pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, on aura $K \cap B(x,\varepsilon') = \varnothing$ donc ${}^c K$ est ouvert et K est fermé.

32 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f atteint sur E un minimum global.

Solution de 32 :

On a $A \in \mathbb{R}$ tel que si $\|x\| \geqslant A$, $f(x) \geqslant f(0_E) + 1$.
Puis f atteint un minimum sur le compact $\overline{B}(0_E, A)$ qui est en fait global.

33 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall\,(x,y) \in K,\ \ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|\,.$$

1. (a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   On pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite définie par $x_0 \in K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_n$ converge vers a.
   On s'intéressera à $\|x_n - a\|$ *et on séparera deux cas suivant s'il existe* n *tel que* $x_n = a$ *ou non.*

Solution de 33 :

1. (a) Si $a \neq b$ conviennent, $\|a-b\| < \|a-b\|$.

(b) Soit $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$. Elle est continue par opération (f l'est car lipschitzienne) sur un compact donc elle atteint un minimum en $a \in K$.

Si $f(a) \neq a$, alors $\|f(f(a)) - f(a)\| = \varphi(f(a)) < \|f(a) - a\| = \varphi(a)$ ce qui est contradictoire.

Donc m est un point fixe de f, le seul.

2. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$.

S'il existe p tel que $x_p = a$, alors, par récurrence, a étant point fixe de f, pour tout $n \geqslant p$, $x_n = a$ donc $x_n \to a$.

Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $\|x_{n+1} - a\| = \|f(x_n) - f(a)\| < \|x_n - a\|$. Donc $(\|x_n - a\|)_n$ est positive et (strictement) décroissante, donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Mais $x \in K^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $b \in K$.

Et $x_{\varphi(n)+1} = f(\varphi(n)) \to f(b)$ par continuité.

Puis $\left\|x_{\varphi(n)} - a\right\| \to \|b - a\| = \ell$ et $\left\|x_{\varphi(n)+1} - a\right\| \to \|f(b) - a\| = \ell$.

Si $a \neq b$, alors $\ell = \|f(b) - a\| = \|f(b) - f(a)\| < \|b - a\| = \ell$ ce qui est contradictoire.

Donc $a = b$ et $\|x_n - a\| \to \ell = \|b - a\| = 0$ donc $x_n \to a$.

34 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, F_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, $f \in E$.

Montrer que la distance de f à F_n est atteinte : on a une fonction polynomiale $\phi_n \in F_n$ telle que

$$\|f - \phi_n\|_\infty = \mathrm{d}(f, F_n) = \inf_{\phi \in F_n} \|f - \phi\|_\infty$$

Solution de 34 :

$\|f\|_\infty \in \{\|f - \phi\|_\infty, \phi \in F_n\}$. Donc $\mathrm{d}(f, F_n) \leqslant \|f\|_\infty$.

On s'intéresse donc aux $\phi \in F_n$ telle que $\mathrm{d}(f, \phi) \leqslant \|f\|_\infty$.

Or l'intersection de boule fermée de centre f et de rayon $\|f\|_\infty$ et de F_n est un fermé borné dans F_n qui est de dimension fini, donc est compact.

L'application continue car lipschitzienne $\phi \mapsto \mathrm{d}(f, \phi)$ atteint un minimum sur $F_n \cap \overline{B}(f, \|f\|_\infty)$ qui est en fait global.

35 Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\|$ et A une partie non vide de E. On rappelle la définition de la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $\mathrm{d}(x_0, A)$, par la formule $\mathrm{d}(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x0\|$.

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe $y \in A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé.
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall\, (a, b) \in A \times B,\ \ \|a - b\| \geqslant \delta$.
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Solution de 35 :

36 Normes subordonnées matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note

$$S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| \leqslant 1\}.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et f l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.
   (a) Justifier que f est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Démontrer que les ensembles

   $$E_1 = \{\|AX\|,\ X \in S\}, \quad E_2 = \{\|AX\|,\ X \in B\} \quad \text{et} \quad E_3 = \left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$$

   admettent une borne supérieure.
   (c) Démontrer que les trois sup sont égaux.

   Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $N(A)$ ce sup commun.
2. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
   On dit que N est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

Solution de 36 : Normes subordonnées matricielles

1. (a) f est linéaire en dimension finie.
   (b) E_1 et E_2 sont des images par des fonctions continues des compacts (fermés bornés en dimension finie) S et B, donc admettent et atteignent ds extremums : les bornes sup sont même des max.
   $E_3 = E_1$ car $\dfrac{X}{\|X\|}$ est de norme 1.
   (c) Vu la remarque précédente, on a déjà $\max E_3 = \max E_1$.
   Puis $S \subset B$ donc $\max E_1 \leqslant \max E_2$.
   Soit $X_0 \in B$ tel que $\|AX_0\| = \max E_2$. Alors on peut choisir $X_0 \neq 0$ (sinon, plus de problème, tout est nul !) et $\dfrac{X_0}{\|X_0\|} \in S$.
   Donc $\max E_2 = \|X_0\| \left\|A\dfrac{X_0}{\|X_0\|}\right\| \leqslant 1 \times \max E_1$.
2. On a déjà $N(A) \geqslant 0$.
   Si $N(A) = 0$, alors vu E_3, pour tout $X \neq 0$, $AX = 0$ donc $\operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = 0_n$.
   Si $X \in S$, $\|\lambda AX\| = |\lambda|\,\|AX\|$ puis on passe au max avec $|\lambda| \geqslant 0$.
   Puis si $X \in S$, $\|(A+B)X\| \leqslant \|AX\| + \|AX\|$ puis on passe aux max.

3. Si $X \in S$ tel que $BX \neq 0$, $\|(AB)X\| = \dfrac{\|A(BX)\|}{\|BX\|}\|BX\| \leqslant N(A)N(B)$, sinon on a quand même $\|(AB)X\| \leqslant N(A)N(B)$, puis on passe au max.
4. Si $X \in S$, $\|AX\|_\infty = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}x_j|\right) = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$.
5. Si $X \in S$, $\|AX\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}x_j| = \sum\limits_{j=1}^n \left(\sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)|x_j| \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)\|X\|_1$, majorant atteint en prenant le vecteur de la base canonique correspondant au j pour lequel ce max est atteint.

6. Connexité par arcs

37 Démontrer qu'un cercle et qu'un segment ne peuvent pas être homéomorphes : il n'existe pas de bijection f entre les deux telle que f et f^{-1} soient continues.

Solution de 37 :

Il suffit d'enlever un point qui n'est pas une borne du segment et on a une fonction continue dont l'image d'un connexe par arc ne l'est plus.

38 Étudier la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 38 :

- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car det $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs alors que det est continue.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs : on montre que chaque matrice inversible peut être jointe continûment à I_n.
  Pour cela, on trigonalise (on peut), $M = PTP^{-1}$. On note d_i les cœfficients diagonaux de T.
  Par connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$, pour chaque $d_i(\neq 0)$, on a un chemin continu $\phi_i : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ tel que $\phi_i(1) = d_i$ et $\phi_i(0) = 1$.
  On pose alors $A(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & & (t \cdot t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_n(t) \end{pmatrix}$.
  $\Phi : t \mapsto PA(t)P^{-1}$ continue par opérations, à valeurs inversibles, $\Phi(0) = I_n$ et $\Phi(1) = M$.
- $\mathcal{O}(n)$ n'est pas connexe par arcs car det $\mathcal{O}(n) = \{\pm 1\}$ non connexe par arcs alors que det est continue.

39 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Solution de 39 :

L'ensemble des matrices diagonalisable est étoilé par rapport à la matrice diagonalisable 0_n.

40 Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe

En utilisant une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.

Solution de 40 : Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe

Soit B une partie ouverte et fermée de A.

On montre que $\mathbb{1}_B$ est continue en passant par la définition : si $a \in B$, qui est un ouvert de A, on a un voisinage de a dans A inclus dans B sur lequel $\mathbb{1}_B(x) = 1 \xrightarrow[x\to a]{} \mathbb{1}_B(a) = 1$; si $a \in {}^c B$, qui est un ouvert de A, on a un voisinage de a dans A inclus dans ${}^c B$ sur lequel $\mathbb{1}_B(x) = 0 \xrightarrow[x\to a]{} 0\mathbb{1}_B(a) = 0$.

Mais alors, comme A est connexe par arcs, $\mathbb{1}_B(A) \in \mathcal{P}(\{0,1\})$ l'est donc $\mathbb{1}_B$ est constante et donc $B = \varnothing$ ou $B = A$.

41 Théorème de Darboux

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to R$ une application dérivable.
Notons $A = \{(x,y) \in I \times I, x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle, autrement dit, f' a la propriété des valeurs intermédiaire.

Solution de 41 : Théorème de Darboux

1. A est convexe, donc connexe par arcs.
2. Soit $z \in g(A)$. Alors il existe $(x,y) \in A$ tel que $z = g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $a \in I$ tel que $z = g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(a)$ et donc $z \in f'(I)$.

   D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. Soit (b_n) une suite de I qui tend vers a par valeurs supérieures. Alors, on a par la définition de la dérivée en a que $g(a, b_n) \to f'(a)$. Mais $g(a, b_n) \in g(A)$, et donc $z \in g(A)$.
3. g(A) est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. Ainsi, $f'(I)$, qui est compris entre un intervalle et l'adhérence d'un intervalle, est lui-même un intervalle.