Connexité par arcs

37 Prendre f homéomorphisme (bijection bicontinue) entre $S = [a, b]$ et $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathbb{R}^2$.

Que se passe-t-il si on enlève un point du segment qui n'est pas une borne ?
Penser à utiliser une propriété de connexité !

38 Indication de niveau 1

- Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ **n'est pas** connexe par arcs.
- Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ **est** connexe par arcs.
- Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ **n'est pas** connexe par arcs.

39 Indication de niveau 1

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une forme particulière qui le rend automatiquement connexe par arcs.

40 Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe

Si B est une partie de A, montrer que $\mathbb{1}_B$ est continue en revenant à la définition.

41 Théorème de Darboux

1. A a une forme particulière la rendant automatiquement connexe par arcs.
2. Attention, il faut lire : $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
   Utiliser le théorème des accroissements finis et la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
3. Utiliser les questions précédentes.

38 Indication de niveau 2

- Pour $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, utiliser une fonction continue.
- Pour $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, ne pas oublier qu'on travaille dans $\mathbb{C}$, donc....
  Construire un chemin continu entre une matrice triangulaire inversible quelconque et I_n n'est pas très compliqué.
- Pour $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, utiliser une fonction continue.

39 Indication de niveau 2

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est étoilé par rapport à une matrice simple.