Limites, continuité, compacité, connexité par arcs

- Pour montrer que $f\colon A\subset E\to\mathbb{R}$ tend vers ℓ, on pourra essayer de majorer la norme de la différence par une quantité tendant vers 0.
- Pour montrer qu'il n'y a pas de limite, penser au critère séquentiel.
- Pour la continuité, et en particulier les prolongements, on peut utiliser le lemme facile :

si $f:\ D\mapsto\mathbb{R}$ où $D=D_1\cup D_2\subset E$ et $a\in\overline{D_1}\cap\overline{D_2}$, alors
$f\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$ si et seulement si $f_{|D_1}\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$ et $f_{|D_2}\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$,

et donc en particulier

f est continue en $a\in D$ tel que $a\in D_1$ et $a\in\overline{D_2}$
si et seulement si $f_{|D_1}$ est continue en a et $f_{|D_2}\underset{x\to a}{\longrightarrow}f(a)$.

- Pour montrer qu'une partie est compacte :
  - ⋆ Si on est en dimension finie, on montre souvent qu'elle est fermée et bornée.
  - ⋆ On peut aussi montrer qu'il s'agit de l'image d'un compact par une fonction continue.
  - ⋆ Autre possibilité : un produit d'un nombre fini de compacts.
  - ⋆ Si rien de tout cela fonctionne, revenir à la définition.
- Usage courant de la compacité : démonstration par l'absurde, permettant d'obtenir une suite de laquelle on extrait une suite convergente, etc. (exemple : preuve du théorème de Heine.)
- Parfois, on est amené à utiliser un résultat « type compacité » comme par exemple un minimum ou un maximum atteint par une fonction f, mais on n'est pas sur un compact. L'idée est alors de traiter séparément l'étude des points « loin » ie hors d'une certaine boule, et ceux de la boule (fermée et donc compacte en dimension finie) pour conclure...
- Pour démontrer qu'un ensemble est connexe par arcs, on revient à la définition ou on le fait apparaître comme image continue d'un ensemble connexe par arcs. On peut aussi reconnaître une partie étoilée voire convexe.
- Pour montrer qu'un ensemble n'est pas connexe par arcs, on peut trouver une application continue qui ne l'envoie pas sur un connexe par arcs (de $\mathbb{R}$ par exemple : pas un intervalle).
- L'utilisation la plus fréquente de la connexité par arcs est celle du théorème des valeurs intermédiaires. Si on croit reconnaître dans une question une utilisation du théorème des valeurs intermédiaires et si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle, on regarde si cet ensemble de départ ne serait pas par hasard connexe par arcs.

Vrai ou faux

1. S'il existe une suite (u_n) convergeant vers a telle que $f(u_n)\to\ell$, alors f admet ℓ comme limite en a.
2. Pour que $f:A\subset\mathbb{R}^2\to F$ admette une limite en $(0,0)$, il suffit que les applications partielles $x\mapsto f(x,0)$ et $y\mapsto f(0,y)$ convergent vers la même limite.
3. Toute application continue est uniformément continue.
4. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
5. Une application linéaire est toujours continue.

1. Exercices cherchés en cours

1 Étudier les limites en $(0,0)$ de $f:(x,y)\mapsto\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ et $g:(x,y)\mapsto\dfrac{x^2}{|x-y|}$.

2 Étudier la continuité de $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et $g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{y^2}{|x|+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

3 Montrer que $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2\leqslant y\leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4 **CCINP 41**

5 **CCINP 35**

6 **CCINP 36**

7 Montrer qu'une norme est 1-lipschitzienne.

8

1. Montrer que $\varphi:f\in(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}),N_\infty)\mapsto\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\in(\mathbb{C},|\cdot|)$ est continue. Est-ce encore le cas avec la norme N_1 de la convergence en moyenne ?
2. Montrer que $f\in(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}),N_1)\mapsto f(0)\in(\mathbb{C},|\cdot|)$ est non continue.

9 Soit $u\in E^{\mathbb{N}}$, $\ell\in E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon>0$, $\{n\in\mathbb{N},u_n\in B(\ell,\varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\{n\geqslant p,u_n\in B(\ell,\varepsilon)\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.

10 **CCINP 13 (nouveau)**

11 **Trèèèèès classique** Montrer que $\mathcal{O}(n)=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),M^\intercal M=I_n\}$ est compact.

12 **Oral Mines** Montrer que la boule unité fermée de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

2. Limites et continuité

13 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Calculer les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$f:\ (x,y)\mapsto\dfrac{xy}{x+y}$ $\qquad h:\ (x,y)\mapsto\dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ $\qquad j:\ (x,y)\mapsto\dfrac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y}$

$g:\ (x,y)\mapsto\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ $\qquad i:\ (x,y)\mapsto\dfrac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y}$ $\qquad k:\ (x,y)\mapsto\dfrac{\sin x-\operatorname{sh}y}{\operatorname{sh}x-\sin y}$

14 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes

$f:\ (x,y)\mapsto\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}$ $\qquad g:\ (x,y)\mapsto\dfrac{x^2+y^2}{x}$

15 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^3y + x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x \neq y, \\ |x| & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

16 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

17 Soir $f : E \to E$ telle que $f(x) = x$ si $\|x\| < 1$ et $\dfrac{x}{\|x\|}$ sinon.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

3. Continuité des applications linéaires

18 **Un exemple de norme subordonnée** On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Δ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. On pose $M = \sup\limits_{u\in\ell^\infty(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \dfrac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$. Justifier l'existence de M et le calculer.

19 Soit u l'application de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(1)$.

1. Démontrer que u n'est pas continue si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_1.
2. L'application u est-elle continue si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_∞ ?

20 **Norme subordonnée d'une application linéaire**

On définit, si f est une application linéaire continue du $\mathbb{K}$-evn $(E, \|.\|_E)$ dans le $\mathbb{K}$-evn $(F, \|.\|_F)$,

$$|||f||| = \sup\left(\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \ ; \ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}\right) = \sup_{x\neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

1. Montrer que $|||.|||$ est bien définie.
2. Montrer que, si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ (espace des applications linéaires continues de E dans F),
$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$
3. Montrer que $|||f|||$ est le plus petit k tel que, pour tout $x \in E$, $|||f(x)|||_F \leqslant k\|x\|_E$
4. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$
5. Ici $E = F$, $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}_c(E)$. Calculer $|||\mathrm{Id}|||$ et montrer que $\forall (u,v) \in \mathcal{L}_c(E)^2, \ |||v \circ u||| \leqslant |||u|||\ |||v|||$

4. Continuité et topologie

21 **Topologie matricielle**

1. Montrer de deux manières différentes que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices symétriques sont fermés.
4. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(n)$ des matrices orthogonales est fermé.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.
6. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense ?
On pourra considérer l'application qui à une matrice 2×2 associe le discriminant de son polynôme caractéristique.
7. Montrer que l'ensemble des matrice de rang $p \in [\![1, n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p = 0$ et $p = n$.

22 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse est continue.

23 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son polynôme minimal n'est pas continue.

24 **Autour de la distance à une partie** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Pour A partie de non vide de E et $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.

1. Rappeler pourquoi $d(x,A)$ est bien définie et $x \mapsto d(x,A)$ est continue.
2. Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \left\{x \in E, \ d(x,A) < \dfrac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que A_n est ouvert.
   (b) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.
   (c) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable (ie indexée par des entiers) d'ouverts.
   (d) Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
4. **Cas où la distance à un fermé est convexe**
On suppose que F est une partie non vide fermée de E et que $x \mapsto d(x,F)$ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$, $d(tx + (1-t)y, F) \leqslant td(x,F) + (1-t)d(y,F)$.
Prouver que F est convexe.
5. **Tout espace vectoriel normé est séparé et normal** On suppose que F_1 et F_2 sont des fermés non vides disjoints de E.
   (a) E est **séparé**[1] : c'est le cas où F_1 et F_2 sont des singletons. Si $x_1 \neq x_2$, montrer qu'on peut trouver des ouverts U, V disjoints de E tels que $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$.
   (b) Montrer qu'il existe une application continue $f : E \to [0,1]$ telle que $F_1 = f^{(-1)}(\{1\})$ et $F_2 = f^{(-1)}(\{0\})$.
   On pourra construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \mapsto d(x,F_1)$ et $x \mapsto d(x,F_2)$.
   (c) E est **normal** : Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.
   On pourra introduire $\varphi : x \mapsto d(x,F_1) - d(x,F_2)$.

1. C'est cet axiome qui garantit l'unicité de la limite.

25 **Caractérisations de la continuité** Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.
3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
4. Pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
5. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.
6. Pour toute partie C de F, Fr$\left(f^{-1}(C)\right) \subset f^{-1}$ (Fr(C)).

5. Compacité

26 Montrer que la sphère unité de $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |p_k|$ n'est pas compacte.

On pourra utiliser la suite $(X^n)_n$.

27 **Écrits Mines** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{AQ, Q \in \mathcal{O}(n)\}$ est compact.

28 **Classique – Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue**

Montrer que si K est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

29 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$ des points de E, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

On appelle **enveloppe convexe** de A l'ensemble des barycentres de ses points à cœfficients positifs. Notons-la Conv(A).

1. Montrer que $K = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que Conv(A) est compacte.

30 **Diamètre d'une partie bornée**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E.

1. Justifier l'existence de $D = \sup\left\{\|x-y\|,\ (x,y) \in A^2\right\}$. On dit que D est le diamètre de A.
2. Démontrer que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $D = \|a-b\|$.
3. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le diamètre de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

31 Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, ℓ sa limite. Montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

32 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f atteint sur E un minimum global.

33 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :
$$\forall (x,y) \in K,\ \ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. (a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   On pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite définie par $x_0 \in K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_n$ converge vers a.
   On s'intéressera à $\|x_n - a\|$ et on séparera deux cas suivant s'il existe n tel que $x_n = a$ ou non.

34 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, F_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, $f \in E$.

Montrer que la distance de f à F_n est atteinte : on a une fonction polynomiale $\phi_n \in F_n$ telle que
$$\|f - \phi_n\|_\infty = \mathrm{d}(f, F_n) = \inf_{\phi\in F_n} \|f - \phi\|_\infty$$

35 Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\|$ et A une partie non vide de E. On rappelle la définition de la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée d(x_0, A), par la formule d$(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x - x0\|$.

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe $y \in A$ tel que d$(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé.
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall (a,b) \in A \times B,\ \ \|a - b\| \geqslant \delta$.
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

36 **Normes subordonnées matricielles**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note
$$S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| \leqslant 1\}.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et f l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.
   (a) Justifier que f est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Démontrer que les ensembles
   $$E_1 = \{\|AX\|,\ X \in S\}, \quad E_2 = \{\|AX\|,\ X \in B\} \quad \text{et} \quad E_3 = \left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$$
   admettent une borne supérieure.
   (c) Démontrer que les trois sup sont égaux.
   Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $N(A)$ ce sup commun.
2. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
   On dit que N est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

6. Connexité par arcs

37 Démontrer qu'un cercle et qu'un segment ne peuvent pas être homéomorphes : il n'existe pas de bijection f entre les deux telle que f et f^{-1} soient continues.

38 Étudier la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

39 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

40 **Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe**

En utilisant une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.

41 **Théorème de Darboux**

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to R$ une application dérivable.

Notons $A = \{(x, y) \in I \times I, x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle, autrement dit, f' a la propriété des valeurs intermédiaire.