Corrigé Mines-Ponts MP Math 1

Première partie

1.
$$I_n = \int_0^n \ln(x+n+1) - \ln(x+1)\, dx = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1)$$

2. $I_n = (2n+1)(\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)) - 2(n+1)(\ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right))$
$= 2n\ln 2 - \ln n + \ln 2 - 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Pour i et j entiers naturels (non nuls dans l'inégalité de droite), on a par monotonie :
$$\int_i^{i+1}\int_j^{j+1} \frac{dx\,dy}{x+y+1} \le \frac{1}{i+j+1} \le \int_{i-1}^{i}\int_{j-1}^{j} \frac{dx\,dy}{x+y+1}$$
On somme l'inégalité de gauche pour i et j variant de 0 à $n-1$, et l'inégalité de droite pour i et j variant de 1 à $n-1$, puis on rajoute à droite les termes $(i=0, 1\le j\le n-1)$, $(j=0, 1\le i\le n-1)$ et $(i=0, j=0)$, ce qui donne l'encadrement : $I_n \le S_n \le I_{n-1} + 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right)$.

4. $\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln n$, et $I_n \sim I_{n-1} \sim 2n\ln 2$, donc $\dfrac{S_n}{2n\ln 2} \longrightarrow 1$, soit $S_n \sim 2n\ln 2$.

5. On développe le carré, ce qui donne une somme double finie que l'on échange avec l'intégrale :
$$J_n = \sum_{0\le i,j\le n-1} \int_0^1 x^{i+j}\, dx = \sum_{0\le i,j\le n-1} \frac{1}{i+j+1} = S_n \sim 2n\ln 2$$

Seconde partie

6. Si $(x_1,\dots x_n)$ est une base orthonormée de E, alors $\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ pour tout n-uplet $(a_1,\dots a_n)$, donc $(x_1,\dots x_n)$ est une suite 1-presque orthogonale.

   Inversement, si cette suite finie est 1-presque orthogonale, alors pour tout n-uplet $(a_1,\dots a_n)$, $\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|^2 = \sum a_i^2$. Pour i et j distincts, on prend $a_i = a_j = 1$ et les autres a_k nuls, ce qui donne $\|x_i + x_j\|^2 = 2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2$, d'où $(x_i|x_j) = 0$, donc $(x_1,\dots x_n)$ est une base orthonormée de E.

7. Supposons $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. On calcule sa norme au carré et on utilise l'hypothèse ii, pour obtenir $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$, donc tous les a_i sont nuls, et la famille est libre.

8. Si la suite (P_n) est μ-presque orthogonale,
$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} \le \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}P_k\right\|^2 \le \mu\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}$$
On reconnait au milieu l'intégrale J_n, d'où $\dfrac{J_n}{n} \le \dfrac{\mu}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} \sim \mu\frac{\ln(2n)}{n}$, soit $\dfrac{J_n}{n} \longrightarrow 0$, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé à la question 5.

9. Avec les notations de l'énoncé, ${}^tAMA = \sum_{i,j} a_i a_j (V_i|V_j) = \|\sum_i a_i V_i\|^2$.

   Supposons $MA = 0$, alors ${}^tAMA = 0$, or la famille $(V_1,\dots V_n)$ est libre donc $A = 0$, d'où M est inversible. M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée, donc il existe P orthogonale et D diagonale sans aucun coefficient diagonal nul tels que $M =^t PDP$.

10. $\|W\|^2 = \sum_{i,j} a_i a_j (V_i|V_j) = {}^t AMA$.

11. $\|W\|^2 = {}^t (PA)D(PA) = \sum_i \lambda_i b_i^2$, en notant $(b_1, \dots b_n)$ le vecteur PA et $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ les éléments diagonaux de D. Cette quantité est strictement positive pour tout vecteur W non nul, donc pour tout n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ non nul (car P est inversible). Il en résulte facilement que tous les λ_i sont strictement positifs. Si α est la plus petite valeur propre de M et β la plus grande, on en déduit l'encadrement $\alpha\|B\| \leq \|W\| \leq \beta\|B\|$.

12. P étant orthogonale, $\|B\| = \|A\|$, i.e $\sum_i b_i^2 = \sum_i a_i^2$. On choisit le réel μ supérieur à β^2 et $\frac{1}{\alpha^2}$. La question précédente conduit donc à l'encadrement $\frac{1}{\mu}\sum_i a_i^2 \leq \|W\|^2 \leq \mu \sum_i a_i^2$, donc $(V_1, \dots, V_n)$ est μ-presque orthogonale.

13. On va démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et toute suite $(k_1, \dots k_n)$ convenable, les valeurs propres de la matrice $M = \big((V_{k_i}|V_{k_j})\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ sont comprises entre $\dfrac{\alpha - 3}{\alpha - 1}$ et $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

    Soit λ une telle valeur propre et $(x_1, \dots x_n)$ un vecteur propre associé. $\forall i,\ \lambda x_i = x_i + \sum_{j \neq i} m_{ij} x_j$. Choisissons l'entier i tel que $|x_i|$ soit maximal, donc strictement positif.

    $|\lambda - 1||x_i| \leq \sum_{j\neq i} \frac{1}{\alpha^{|k_j - k_i|}}|x_i| \leq |x_i| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha^p}$ car les indices k_j sont deux à deux distincts et supérieurs ou égaux à 1 donc pour tout entier p, il ne peut y avoir au plus que 2 valeurs de j telles que $|k_i - k_j| = p$. En simplifiant, il vient $|\lambda - 1| \leq \dfrac{2}{\alpha - 1}$, or λ est réel, d'où l'encadrement voulu.

    Or $\alpha > 3$, donc 0 n'est pas valeur propre de M, donc la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est libre, et en utilisant la question 12, pour tout n-uplet convenable $(k_1, \dots k_n)$, la suite $(V_{k_1}, \dots V_{k_n})$ est μ-presque orthogonale, avec $\mu \geq \left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^2$ et $\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha-3}\right)^2$, d'où un choix de μ indépendant de l'entier n, ce qui achève de montrer que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est presque orthogonale.

14. $x \mapsto f(x,1)$ a pour dérivée $\dfrac{\sqrt{3}(1-x)}{\sqrt{2x+1}(2+x)^2}$ qui est négative.

    $y \mapsto f(1,y) = 1$.

    $G : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ a pour dérivée $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$ qui est négative.

    $y \mapsto \lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0$.

    $f_y : x \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $\dfrac{y^2\sqrt{2y+1}(1-x)}{(y+xy+1)^2\sqrt{2xy+1}}$ qui est négative.

    $f_x : y \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $\dfrac{-y(1-x)^2}{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}(y+xy+1)^2}$ qui est négative.

    Toutes les fonctions étudiées sont donc décroissantes (et parfois constantes).

15. f_y est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]\lim_{x\to+\infty} f_y, f_y(1)] =]0,1]$, donc γ possède un antécédent noté $\varphi_\gamma(y)$, i.e $f(\varphi_\gamma(y), y) = \gamma$.

    G est continue strictement décroissante, donc est une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]0, 1[$, d'où l'existence de $\beta > 1$ tel que $G(\beta) = \gamma$.

    f_x étant décroissante, $G(x) \leq f(x,y)$, donc $G(\varphi_\gamma(y)) \leq f(\varphi_\gamma(y), y) = \gamma = G(\beta)$, donc $\varphi_\gamma(y) \geq \beta$ pour tout y.

16. Si $\mu = 1$, alors d'après 6, la suite (Q_i) est orthonormale, or $(Q_i|Q_j) = \dfrac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_j+1}}{k_i + k_j + 1}$ qui est strictement positif : contradiction.

    La μ-presque orthogonalité s'écrit $\forall (a_i)_{1\leq i \leq n},\ \frac{1}{\mu}\sum_i a_i^2 \leq \sum_{i,j} a_i a_j \dfrac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_j+1}}{k_i+k_j+1} \leq \mu \displaystyle\sum_i a_i^2$.

    En appliquant cette double inégalité pour $n = 2$, on obtient finalement que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\mu}(a^2+b^2) \leq a^2 + b^2 + 2ab\frac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_i + k_{i+1} + 1} \leq \mu(a^2+b^2)$$

On pose alors $\lambda = \dfrac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_i+k_{i+1}+1}$, ce qui donne $(\mu-1)a^2 - 2\lambda ab + (\mu-1)b^2 \geq 0$ et $(\mu-1)a^2+2\lambda\mu ab+(\mu-1)b^2 \geq 0$, i.e les deux matrices symétriques $\begin{pmatrix} \mu-1 & -\lambda \\ -\lambda & \mu-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu-1 & \lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu-1 \end{pmatrix}$ sont positives.

Or la matrice symétrique réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si $a \geq 0$ et $ac - b^2 \geq 0$ donc on obtient ici les conditions suivantes : $\mu-1 \geq 0$, $(\mu-1-\lambda)(\mu-1+\lambda) \geq 0$, $(\mu-1-\lambda\mu)(\mu-1+\lambda\mu) \geq 0$, soit finalement $\mu - 1 \geq \lambda\mu$ (car $\lambda \geq 0$), i.e $\lambda \leq 1 - \dfrac{1}{\mu}$.

On pose alors $\theta_i = \dfrac{k_{i+1}}{k_i}$. On observe que $\lambda = f(\theta_i, k_i)$. On pose $\gamma = 1 - \dfrac{1}{\mu}$.

Alors la condition s'écrit $\forall i,\ f(\theta_i, k_i) \leq \gamma = f(\varphi_\gamma(k_i), k_i)$ d'où $\theta_i \geq \varphi_\gamma(k_i)$. D'après 15, il existe β tel que $G(\beta) = \gamma$ et dans ce cas $\varphi_\gamma(y) \geq \beta$ pour tout y, d'où $\theta_i \geq \beta$.

En conclusion, $k_{i+1} \geq \beta k_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.