DL 8 – Sujet CCINP 2018 Maths 1 MP

Q1. Avec le développement en série entière de l'exponentielle de rayon infini, on a pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ avec une convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$.

On peut donc intervertir série-intégrale directement (les fonctions étant toutes bien continues)

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} \,\mathrm{d}x$$

donc $\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.}$

Q2. Le théorème spécial sur les séries alternées s'applique : $\left(\frac{1}{(2n+1)n!}\right)_n$ tend vers 0 en décroissant et $I - S_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$ est le reste d'ordre n.

On a donc que $\boxed{|I - S_n| = |R_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)(n+1)!}\right| = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.}$

Q3.

```python
def factorielle(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * factorielle(n - 1)
```

Q4. Il est évidemment déraisonnable d'utiliser la fonction précédente dans un tel script !

```python
def rang(precision):
    "renvoie le 1er entier n tel que 1/((2n+3)(n+1)!) <= precision"
    n = 0
    facto = 1 # va contenir (n + 1)!
    while precision * (2 * n + 3) * facto < 1:
        n += 1
        facto *= n + 1
    return n

rang(1e-6)
```

Q5. Soit $x \geqslant 0$. $f_n(x) = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}$ avec $-\frac{x^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) = -n \times \frac{x^2}{n} + \mathrm{o}(1) = -x^2 + \mathrm{o}(1)$ (on évite les équivalents à cause du problème en $x = 0$, qu'on pourrait aussi traiter à part).

Donc $n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x^2$ puis $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}$ par continuité de exp.

Finalement, $\boxed{(f_n)_n \text{ converge simplement vers } \varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \text{ sur } [0; +\infty[.}$

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. $|f_n(x)| = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}$.

Or $\forall u > -1, \quad \ln(1+u) \leqslant u$. En effet, la fonction ln est concave car deux fois dérivable et $\ln'' \leqslant 0$ donc sa courbe est sous sa tangente en 1 ce qui revient à dire que pour tout $t > 0$, $\ln t \leqslant 1(t-1)+0$ et conduit à l'inégalité attendue.

On a donc $\boxed{|f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{n\left(-\frac{x^2}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-x^2}.}$

On applique ensuite le théorème de convergence dominée.

H1 Toutes les f_n sont continues sur $[0,1]$.

H2 D'après la question précédente, $(f_n)_n$ converge simplement vers φ qui est aussi continue sur $[0,1]$.

H3 D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec φ intégrable (continue sur le segment).

donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = I.$

Or, avec la formule du binôme,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(-\frac{x^2}{n}\right)^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n^k}\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(2k+1)n^k}$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(2k+1)n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.}$

Q7. On a, $\forall i,j \in [\![0,n]\!], \quad \ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ donc

$$\forall j \in [\![0,n]\!], Ln(f)(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\,\delta_{i,j} = f(x_j)$$

et $\forall i \in [\![0,n]\!]$, deg $\ell_i = n$ donc deg $L_n(f) \leqslant n$. Ainsi, $\boxed{L_n(f) \text{ est un polynôme interpolateur de } f \text{ aux } x_i.}$

Si P, Q conviennent, deg$(P-Q) \leqslant n$ et $P-Q$ a $n+1$ racines distinctes, donc $P=Q$, d'où $\boxed{\text{l'unicité.}}$

Q8.

```python
def lagrange(x, y, val):
    n = len(x)
    def p(i, val):
        "renvoie produit(val - x_k, k != i) / produit(x_i - x_k, k != i)"
        resultat = 1
        for k in range(n):
            if k != i:
                resultat *= (val - x[k]) / (x[i] - x[k])
        return resultat

    resultat = 0
    for i in range(n):
        resultat += y[i] * p(i, val)
    return resultat
```

Q9. $\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}$ est une matrice de Vandermonde.

La complexité de l'algorithme du pivot de Gauss est $\boxed{\mathcal{O}(n^3)}$ d'après le cours d'informatique.

Q10. Notons $a_0, \ldots, a_p$ les zeros de ϕ avec $a \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_p \leqslant b$.
Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, ϕ continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et $\phi(a_k) = \phi(a_{k+1}) (= 0)$.
Par théorème de Rolle, on a un zéro $a'_k \in]a_k, a_{k+1}[$ de ϕ'. Ainsi ϕ', $p-1$ fois dérivable, s'annule en $p-1$ points distincts.
On raisonne donc par récurrence, en notant $\mathcal{H}(p)$ la propriété à démontrer à $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- Si $p = 0$, il n'y a rien a faire, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(p-1)$ soit vraie.
  Alors, comme ci-dessus, si ϕ est p fois dérivable et s'annule $p+1$ fois, ϕ' peut recevoir l'hypothèse de récurrence : on a $c \in]a, b[$ tel que
  $$(\phi')^{(p-1)}(c) = \phi^{(p)}(c) = 0,$$
  ce qui établit la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\exists c \in]a, b[, \ \phi^{(p)}(c) = 0.}$

Q11. Si $x \in \sigma$, $\mathcal{P}_x$ s'écrit $0 = 0$. Ainsi, tout $c_x \in]a, b[$ convient, $\boxed{\mathcal{P}_x \text{ est vraie.}}$

Q12. On prend $\boxed{\lambda = \dfrac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}}$ ce qui est licite car $\pi_\sigma(x) \neq 0$ car $x \notin \sigma$.

Q13. F s'annule en x vu le choix de λ et en chaque x_i car $P_n(f)$ polynôme interpolateur de f aux x_i et les x_i sont racines de π_σ.
Comme $x \notin \sigma$, cela donne bien $n+2$ zéros.
Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, $F \in \mathcal{C}^{n-1}([a, b])$, en particulier $n+1$ fois dérivable et par **Q10**, avec $p = n+1$, on a $c_x \in]a, b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$.
Or $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $(L_n(f))^{(n+1)} = 0$ Finalement, $F^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - (n+1)!\lambda = 0$ donc $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n-1)!}$.

On a donc $c_n \in]a, b[$ tel que $F(x) = 0 = f(x) - L_n(f)(x) - \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$ soit $\boxed{\mathcal{P}_x \text{ vraie.}}$

Q14. $f^{(n+1)}$ continue sur le **segment** $[a, b]$ donc $\boxed{\text{bornée}}$ et $\left\|f^{(x+1)}\right\|_\infty$ existe, et si $x \in (a, b)$, vu **Q13**,

$$|f(x) - L_n(f)(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}|\pi_\sigma(x)|$$

avec $|\pi_\sigma(x)| = \displaystyle\prod_{x=0}^{n} |x - x_i| \leqslant (b-a)^{n+1}$ car tous les x_i et x sont dans $[a, b]$ donc $\forall i, \ \mathrm{d}(x, x_i) \leqslant \mathrm{d}(a, b)$.

Finalement, $\forall x \in [a, b)], \ |f(x) - Ln(f)(x)| \leqslant \dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n)}\right\|_\infty$ qui ne dépend pas de x et où on a posé

$\boxed{K = b - a}$ donc $\boxed{\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.}$

Q15. Si $f = \sin$, $\left|f^{(n+1)}\right| = |\sin|$ ou $|\cos|$ selon la parité de n. Dans tous les cas, $\left\|f^{(n+1)}\right\| \leqslant 1$ (et même =.)
Avec **Q14**, $\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \dfrac{K^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0$ par croissances comparés.

Donc $\boxed{(L_n(\sin))_n \text{ converge uniformément vers } \sin.}$

Q16. Par les développements en séries entière usuels, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$. Par unicité des cœfficients d'un développement en série entière, on a alors $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (-1)^k = \dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}$.

En particulier, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geqslant \left|f^{(2k)}(0)\right| = (2k)!.}$

Q17. $P_0 = \mu$ avec $\|P_0\|^2 = 1 = \langle P_0, P_0\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mu^2 \,\mathrm{d}t = 2\mu^2$ donc $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\boxed{P_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

Puis on cherche $Q_1 = X - \lambda$ avec $\langle X - \lambda, 1\rangle = 0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t-\lambda)\,\mathrm{d}t = 0 - 2\lambda$ donc $\lambda = 0$ (on a $(1, X)$ déjà orthogonale) et $P_1 = \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|}$ où $\|Q_1\|^2 = \langle X, X\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{P_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X.}$

Q18. Par le procédé de Schmidt, P_n s'écrit sous la forme $\dfrac{X^n + R_n}{\|P_n\|}$ où R_n est de degré au plus $n-1$, donc $\boxed{\deg P_n = n.}$ Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormale, P_n est orthogonal à tous les P_i pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Or $(P_0, \cdots, P_{n-1})$ famille de polynômes orthonormaux donc libre, tous dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(P_0, \dots, P_{n-1})$ base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Finalement, on a bien $\boxed{P_n \text{ orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

Q19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \langle P_n, 1\rangle = 0$ d'après **Q18** car $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Si P_n n'avait pas de racine dans $[-1,1]$, comme $t \mapsto P_n(t)$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il est de signe constant. Et toujours par continuité, on aurait alors, par positivité améliorée, $\forall\, t \in [-1,1], \quad P_n(t) = 0$, donc $P_n = 0$ (infinité de racines), ce qui est contradictoire.

Donc $\boxed{P_n \text{ s'annule dans [-1, 1].}}$

Q20. $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t = \langle Q, P_n\rangle$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $p < n$. Donc $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,\mathrm{d}t = 0}$ d'après **Q18**. Vu l'énoncé, dans $H = QP_n$, toutes les racines ont une multiplicité paire, donc H est de la forme $H = R \times \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{2\alpha_k}$ où R n'a pas de racine réelle, $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ et les a_k sont deux à deux distincts.

Donc R est de signe constant ainsi que H.

Comme, de plus, $t \mapsto H(t)$ continue, par positivité améliorée, $\forall t \in [-1,1]$, $H(t) = 0$. H aurait donc une infinité de racines donc $H = 0 = Q \times P_n$.

Comme, par hypothèse, $Q \neq 0$, $P_n = 0$ (par intégrité de $\mathbb{R}[X]$) ce qui entre en contradiction avec le fait que $\deg P_n = n$.

Le nombre de racines de P_n de multiplicité impaire vérifie donc $p \geqslant n$ et comme $p \leqslant n$, $p = n$. Cette multiplicité est donc nécessairement 1 : $\boxed{P_n \text{ scinde aàracines simples.}}$

Pour justifier que $\boxed{\text{toutes les racines sont dans } [-1,1],}$ il suffit d'adapter le raisonnement en ne considérant, pour $t_1, \dots, t_p$, que les racines de multiplicité impaire **dans** $[-1,1]$ et la conclusion reste valable (énoncé ambigu) : les autres racines de H sont racines de R, qui reste bien de signe constant sur $[-1,1]$.

Q21. Changement de variable $x = x_k + (t+1)\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}$ (de classe $\mathcal{C}^1$), soit $t = 2\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} - 1$, « $\mathrm{d}x = \dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}\,\mathrm{d}t$ »,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g(t) \times \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\,\mathrm{d}t$$

soit $\boxed{\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t.}$

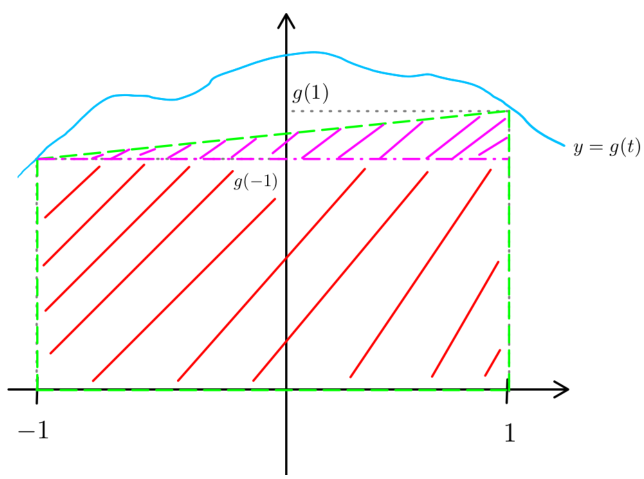
Q22. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par unicité du polynôme interpolateur, $L_n(P) = P$. Ainsi $\boxed{\displaystyle J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.}$

Q23. On calcule $\ell_0(X) = \dfrac{X-t_1}{t_0-t_1} = -\dfrac{1}{2}(X-1)$ et $\ell_1(X) = \dfrac{X-t_0}{t_1-t_0} = \dfrac{1}{2}(X+1)$. Donc

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}[0-2]$$

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} \ell_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[0+2]$$

donc $\boxed{\alpha_0 = 1}$ et $\boxed{\alpha_1 = 1.}$ D'où $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx g(-1)+g(1).}$



L'aire du trapèze (vert), si $g(-1) \leqslant g(1)$ (arbitraire), est la somme des aires du rectangle rouge et du triangle rose, soit

$$2g(-1) + \frac{2\times(g(1)-g(-1))}{2} = g(-1)+g(1)$$

Q24. Comme $QP_{n+1} = P - R$ et $\deg R < \deg P_{n+1} = n+1$ vu la partie 3,

$$\deg(QP_{n+1}) \leqslant \max(\deg P, \deg R) \leqslant \max(2n+1, n)$$

donc $\deg Q + \underbrace{\deg(P_{n+1})}_{=n+1} \leqslant 2n+1$ donc $\deg Q \leqslant n$. $\quad (*)$

Ainsi $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et vu la question **Q18**, $P_{n+1} \perp Q$.

Autrement dit, $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Par ailleurs, les t_i étant les racines de P_{n+1}, $Ln\left(QP_{n+1}\right)=0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $J\left(QP_{n+1}\right)=0$.

On a donc bien $J\left(QP_{n+1}\right)=\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Par linéarité de J, on a $\boxed{J(P)=J\left(QP_{n+1}\right)+J(R)=\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1} R(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t}$ vu $(*)$ et **Q22**.

Q25. Si $i\in\llbracket 0,n\rrbracket$, $\alpha_i=\displaystyle\int_{-1}^{1}\ell_i(t)\,\mathrm{d}t$. On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\times 1=J(1)$. Or $L_n(1)=1$ (polynôme de degré au plus n valant 1 aux t_i) donc $J(1)=\displaystyle\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t=2$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=2}$ (cohérent avec **Q23**).

Pour montrer que $\alpha_i>0$, on pense utiliser **Q24**.

Pour isoler α_i dans $J(g)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j g\left(t_j\right)$, il nous faut g telle que $g\left(t_j\right)=\delta_{i,j}$.

$g=\ell_i$ convient mais on obtient alors $\alpha_i=\displaystyle\int_{-1}^{1}\ell_i(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui ne nous avance pas beaucoup.

On essaye alors $g=\ell_i^2$: polynôme de degré $2_n\leqslant 2_n+1$.

Or, par **Q24**, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\ell_i^2(t)\,\mathrm{d}t=J\left(\ell_i^2\right)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\underbrace{\ell_i^2\left(t_j\right)}_{=\delta_{ij}}=\alpha_i$.

Comme ℓ_i^2 continue, positive et non identiquement nulle sur $[-1,1]$, on obtient bien $\boxed{\forall\, i\in\llbracket 0,n\rrbracket,\quad \alpha_i>0.}$

$\mathcal{F}in$