CONCOURS COMMUN INP 2021
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES II- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE

Q1. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in (\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ donc pour toute matrice D =diag $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ on a $\operatorname{Tr}(D.A) = 0$.

Comme $D.A = (\alpha_i a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_{i,i} = 0$, en particulier pour les matrice $E_{i,i}$ (dont tous les coefficients sont nuls , sauf celui d'indice (i,i) qui vaut 1) on obtient $a_{i,i} = 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$. Donc A est une matrice de diagonale nulle. Réciproquement les matrice de diagonale nulle sont évidement dans $(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ .Ainsi

$$(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^{\perp} = \left\{A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , a_{i,i} = 0 \ \forall i \in [\![1,n]\!]\right\}$$

PROBLÈME : Théorème de décomposition de Dunford

Partie I - Quelques exemples

Q2.

- On vérifie facilement que :

  Si A est diagonalisable , par unicité , la décomposition de Dunford de A est $(A, 0_n)$.

  Si A est nilpotente , par unicité , la décomposition de Dunford de A est $(0_n, A)$.
- Une matrice trigonalisable admet un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, donc elle admet une décomposition de Dunford.
- Le couple $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, car elles ne commutent pas.

Q3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = X^2 + 1$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'admet pas de décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Ona

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)^3 \end{aligned}$$

Donc A admet une décomposition de Dunford . On sait que $\chi_A = \chi_D$, donc D admet -1 pour unique valeur propre , D est diagonalisable donc $D = -I_{3.}$. Par suite $N = A + I$, qui est nilpotente d'indice 2 ($N^2 = 0_3$).

Q5. Application

On a $A = D + N$, avec $D = -I_{3.}$ et $N = A + I$. Comme $D.N = N.D$ alors $\exp(D + N) = (\exp D)(\exp N)$.

$$\begin{aligned}\exp D &= \exp(-I_{3.}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) I_{3.} \\ &= \mathrm{e}^{-1} I_{3.}\end{aligned}$$

Puisque $N^2 = 0_3$ alors $N^k = 0_3$ pour $k \geq 2$ et

$$\exp N = I_{3.} + N$$

Ainsi

$$\exp A = \mathrm{e}^{-1}(I_{3.} + N) = \mathrm{e}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Q6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$. On multiplie cette dernière relation par $(A + I_n)$, on obtient $A^2\left(A^2 - I_n\right) = 0$ donc le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2 .
La matrice A^2 admet un polynôme annulateur scindé a racines simples donc elle est diagonalisable .
Posons $N = A - A^2$, on a alors $N^2 = A^2(A - I_n)^2 = 0$, N est nilpotente .
A^2 et N sont des polynômes en A, donc elles commutent .
Par unicite $(A^2, A - A^2)$ est la décomposition de Dunford de la matrice A .

Partie II - Un exemple par deux méthodes.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

Q7.

- Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1-X & 0 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &\overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -2 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)^2\end{aligned}$$

  1 est une valeur propre simple de A, donc $\dim E_1(A) = 1$, A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2(A) = 2$.

On a si $X \in E_2(A)$ alors $AX = 2X$, posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne $x = y$ et $z = 0$ et $E_2(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ qui est de dimension 1. La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- On a $\chi_u(X) = \chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$, le théorème du décomposition des noyaux donne $\ker\chi_u(u) = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2$.
  Or $\chi_u(u) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton) donc $\ker\chi_u(u) = \mathbb{R}^3$, ainsi $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2$.

Q8.

— On a $\ker(u - 2\text{id}) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, prenons $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u - \text{id})$ alors $\left\{ \begin{array}{c} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right.$, ce qui donne $x = 0$, $y = z$, prenons $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\ker(u - \text{id}) = \text{vect}(e_1\}$.

— On a $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u - 2\text{id})^2$ alors $x - y = 0$ et $\ker(u - 2\text{id})^2 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ posons $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\det(e_1, e_2, e_3) = -1$,donc (e_1, e_2, e_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$, ainsi (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

— Oa $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3$. Ce qui donne $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q9. Posons $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie que : $B = D_1 + N_1$, $D_1.N_1 = N_1.D_1$ et $N_1^2 = 0_3$. Donc (D_1, N_1) est la décomposition de Dunford de la matrice B .

A et B sont semblables , $A = P.B.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La décomposition de Dunford de la matrice A est (D,N) avec $D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q10.

— Posons $F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$, la décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}$$

$a = [(X-1)F(X)]_{X=1} = 1$, $c = \left[(X-2)^2F(X)\right]_{X=2} = 1$, le calcul de la limite en $+\infty$ de $xF(x)$ de deux façons donne $0 = a+b$, donc $b = -1$. Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}$$

— L'expression précédente devient : $F(X) = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{3-X}{(X-2)^2}$, on la multiplie par $(X-1)(X-2)^2$ on obtient

$$1 = (X-2)^2 - (3-X)\,(X-1)$$

ainsi $U = X - 3$ et $V = 1$.

Q11.

— La relation $(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1$ donne

$$U(u) \circ (u - \mathrm{id}) + V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{id}$$

Donc $p(x) + q(x) = x$ pour tout x de $\mathbb{R}^3$.

— D'après la question 7 on a $\mathbb{R}^3 = \ker(u-\mathrm{id}) \oplus \ker(u-2\mathrm{id})^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$,il existe deux vecteurs uniques : $x_1 \in \ker(u-\mathrm{id})$ et $x_2 \in \ker(u-2\mathrm{id})^2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
On a $q(x_1) = U(u)\left((u-\mathrm{id})(x_1)\right) = 0$ donc $p(x_1) = x_1$ et $p(x_2) = 0$, de même on a $q(x_2) = x_2$ et $q(x_1) = 0$.
Ainsi p est la projection sur $\ker(u-id)$ parallèlement à $\ker(u-2id)^2$ et q est la projection sur $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u-\mathrm{id})$.

Q12. On a $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$, $d(e_2) = 2e_2$ et $d(e_3) = 2e_3$, donc la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ainsi d est diagonalisable. d est un polynôme en u car p et q le sont .

Posons $n = u - d$, la matrice de n dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc n est nilpotente , d et n commutent car ce sont des polynômes de u . Si on note N et D les matrices, respectivement, de n et u dans la

base canonique de $\mathbb{R}^3$. De ce qui précède (D, N) est la décomposition de Dunford de la matrice A .
On a $d = p + 2q = id + q$ donc

$$\begin{aligned} d &= id + U(u) \circ (u - \text{id}) \\ &= id + (u - 3\text{id}) \circ (u - \text{id}) \\ &= u^2 - 4u + 4\text{id} \end{aligned}$$

et $n = u - d = -u^2 + 5u - 4\text{id}$, ce qui donne

$$D = A^2 - 4A + 4I_3 \quad \text{et} \quad N = -A^2 + 5A - 4I_3$$

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. v commute avec u donc avec $u - \lambda_i\text{id}$, on en déduit que $E_{\lambda_i}(u)$ =ker$(u - \lambda_i\text{id})$ est stable par v . Soit $v_i = v_{|E_{\lambda_i}(u)}$.
Comme v est diagonalisable, donc le polynôme minimal π_v est scindé a racines simples , π_v annule v_i par suite v_i est diagonalisable , soit B_i une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i , qui sont aussi et des vecteurs propres de v . Or u est diagonalisable alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, donc $\bigcup_{i=1}^{p} B_i$ est une base de E,formée de vecteurs qui sont propres à la fois a u et a v, c'est une base commune de diagonalisation pour u et v.
Q14. Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés, respectivement, à A et B , donc ils sont diagonalisables et commutent , il existe donc une base commune de diagonalisation pour u et v. Dans cette base $u - v$ est diagonalisable. Ce qui montrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
Q15. Si A et B sont deux matrices nilpotentes; d'indice de nilpotence, respectivement, p et q . A et B commutent donc ,

$$(A - B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k \ (-B)^{p+q-k}$$

remarquons que si $k \geq p$ alors $A^k = 0_n$ et $k < p$ alors $p + q - k > q$ et $B^{p+q-k} = 0_n$, ainsi $(A - B)^{p+q} = 0_n$, $A - B$ est donc nilpotente .
Q16. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est à la fois diagonalisables et nilpotente, donc A est semblable à une matrice diagonale D, cette dernière est aussi nilpotente , donc $D = 0_n$ par suite $A = 0_n$.
Q17. Soit (D, N) et (D', N') vérifiant les conditions $(1), (2), (3), (4)$ et tel que D , N ,D' et N soient des polynômes en A.
On a : $D + N = D + N'$ donc $D - D' = N' - N$. Or D commute avec D' et N commute avec N', car elles sont des polynômes en A, donc $D - D'$ est diagonalisable et $N' - N$ est nilpotente , la question Q16 donne $D = D'$ et $N' = N$, d'où l'unicité de (D, N).

Part - IV Non continuité de l'application $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{D}$

Q18. $\mathcal{D}$ n'est pas stable par addition :
$n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, elles sont diagonalisables mais $A + B$ ne l'est pas car elle est nilpotente et non nulle.

Dans le cas général on prend deux matrices par blocs : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si P est une matrice inversible, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue.

Q19. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ montrons que M est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}$.

Le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{C}$, donc M est trigonalisable , il existe P une matrice inversible et T une matrice triangulaire telles que $M = P.T.P^{-1}$. La diagonale de T ,$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est constituée des valeurs propres de M.

Posons $T_k = T+\text{diag}(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, ..., \frac{n}{k})$. Les valeurs propres de T_k sont $\left(\lambda_1 + \frac{1}{k}, \lambda_2 + \frac{2}{k}, \ldots, \lambda_n + \frac{1}{k}\right)$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$. Si $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\lambda_i + \frac{i}{k} \neq \lambda_j + \frac{j}{k}$.

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k}$, alors $|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{|i-j|}{k} \leq \frac{1}{k}$, à partir d'un cerain rang k_0 on a

$\frac{1}{k} < \min \{|\lambda_l - \lambda_m|, (l,m) \in [\![1,n]\!]\ \lambda_l \neq \lambda_m\}$, donc pour $k \geq k_0$ on a

$\lambda_i + \frac{i}{k} \neq \lambda_j + \frac{j}{k}$. Ainsi pour $k \geq k_0$; T_k admet n valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

De plus on a $T_k \underset{k\to+\infty}{\to} T$. L'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est continue donc $PT_kP^{-1} \underset{k\to+\infty}{\to} PTP^{-1} = A$.

Ce qui prouve que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q20. Si (D,N) est la décomposition de Dunford de A, on a $\varphi(A) = D$.

Si $A \in \mathcal{D}$ alors $(D,N) = (A,0)$ donc $\varphi(A) = A$ et φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$.

Supposons que φ est continue, soit A une matrice non diagonalisable. On sait que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc il existe une suite (M_k) de matrices diagonalisables qui converge vers A. On a $\varphi(M_k) = M_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$, φ est continue donc $\varphi(M_k) \underset{k\to+\infty}{\to} \varphi(A)$ ainsi $\varphi(A) = A$ et A est diagonalisable, absurde donc φ n'est pas continue.

FIN