Mines-Ponts 2006 MATH. I MP

Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et l colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Si $M\in\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ et $x\in\mathbb{K}^\ell$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx\in\mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i| \text{ et } \|M\|_1=\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la norme matricielle subordonnée.

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M\in\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j}, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M\geqslant 0$ (respectivement $M>0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$m_{i,j}\geqslant 0 \text{ (resp . } m_{i,j}>0\text{) pour tout } (i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,l\}.$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M\geqslant N$ (respectivement $M>N$) lorsque $M-N\geqslant 0$ (respectivement $M-N>0$).

Une matrice $M\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{i,j}, 1\leqslant i,j\leqslant n)$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j}=1, \text{ pour tout } j\in\{1,\dots,n\}.$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x\geqslant 0 \text{ et } x\neq 0\},$$
$$B^+=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x>0\},$$
$$\Sigma=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_1=1\}.$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Perron-Frobenius) *Soit $T\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $(I_n+T)^{n-1}>0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0=x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma\cap B$,*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}T^{kj}y=\frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

I Un vecteur propre strictement positif

On suppose que T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que $P=(I_n+T)^{n-1}$ est strictement positive.

1) Montrer que pour tout $x\in B$, l'ensemble $\Gamma_x=\{\theta\in\mathbb{R}^+ \mid \theta x\leqslant Tx\}$ est non vide, fermé et borné.

   On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

2) Montrer que pour tout $x\in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x)=\min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} \mid 1\leqslant i\leqslant n \text{ et } x_i\neq 0\right\}.$$

   On note θ l'application de B dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tout $\alpha>0$ et tout $x\in B$, $\theta(\alpha x)=\theta(x)$.

4) Montrer que $P(B)\subset B^+$.

5) Montrer que pour tout $x\in B$, $\theta(Px)\geqslant\theta(x)$ et $\theta(Px)>0$.

6) Soit $x \in B$ un vecteur propre de T. Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7) Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

9) Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Montrer que $\sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) \geqslant \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

11) Montrer que $\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

12) Montrer que $\sup\limits_{x \in C} \theta(x) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

II Une méthode d'approximation

On suppose maintenant que T est stochastique et telle que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $R_k = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{j=0}^{k-1} T^j$.

14) Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ.
Montrer que $|\theta| \, x^+ \leqslant T x^+$.

15) En déduire que $|\theta| \leqslant \theta_0$.

16) Montrer que $|\theta| \, \|x^+\|_1 \leqslant \|x^+\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leqslant 1$.

17) En déduire $\theta_0 = 1$.

18) Montrer que pour tout $j \geqslant 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

19) Établir, pour tout $k \geqslant 1$, les inégalités suivantes :
$$\left\|T^k\right\|_1 \leqslant 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leqslant 1.$$

20) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leqslant \dfrac{2}{k}$.

21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$ a au moins une valeur d'adhérence.

22) Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$, montrer que $Ty = y$ et que pour tout $k \geqslant 1$, $R_k y = y$.

23) Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x, k \geqslant 1)$, montrer pour tous les entiers m et l, l'identité suivante :
$$y - z = R_l \left(R_m x - z\right) - R_m \left(R_l x - y\right).$$

24) Montrer que la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$ a exactement une valeur d'adhérence.

25) Montrer qu'il existe une matrice R telle que $Rx = \lim\limits_{k \to +\infty} R_k x$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.

26) Montrer que T et R commutent.

27) Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.

28) Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ et $\mathrm{Im}(T - I_n)$.

29) On admet que $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.

FIN DU PROBLÈME

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.