Devoir Libre n° 7

Exercice 1 – Urne de Pólya : exercice 29 du TD

Exercice 2 – Loi du 0-1 de Borel : exercice 31 du TD

Exercice 3 – Loi Zeta : exercice 32 du TD

Exercice 4 – Deux applications à la formule trouvée dans l'exercice précédent

Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $s > 1$,

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Les deux questions sont indépendantes. On admet que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. On se propose en application de prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
   Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
   Conclure.
2. Soit $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \leqslant b \leqslant n!$ et P_n la probabilité que a et b soient premiers entre eux.
   Soit $p \leqslant n$ un nombre premier.
   On note B_p l'événement « p n'est pas un diviseur commun de a et de b. »
   (a) Quelle est la probabilité qu'un entier tiré au hasard entre 1 et $n!$ soit divisible par p ?
   (b) Justifier que la probabilité de l'événement B_p est $1 - \dfrac{1}{p^2}$.
   (c) Justifier que les B_p pour $p \leqslant n$ sont mutuellement indépendants.
   (d) En admettant que le résultat reste valable pour $p \leqslant n!$, en déduire une expression de P_n.
   (e) Montrer le théorème de Césàro : $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{6}{\pi^2}$. Interpréter ce résultat.

MP 1 À rendre lundi 24 janvier

Devoir Libre n° 7

Exercice 1 – Urne de Pólya : exercice 29 du TD

Exercice 2 – Loi du 0-1 de Borel : exercice 31 du TD

Exercice 3 – Loi Zeta : exercice 32 du TD

Exercice 4 – Deux applications à la formule trouvée dans l'exercice précédent

Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $s > 1$,

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Les deux questions sont indépendantes. On admet que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. On se propose en application de prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
   Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
   Conclure.
2. Soit $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \leqslant b \leqslant n!$ et P_n la probabilité que a et b soient premiers entre eux.
   Soit $p \leqslant n$ un nombre premier.
   On note B_p l'événement « p n'est pas un diviseur commun de a et de b. »
   (a) Quelle est la probabilité qu'un entier tiré au hasard entre 1 et $n!$ soit divisible par p ?
   (b) Justifier que la probabilité de l'événement B_p est $1 - \dfrac{1}{p^2}$.
   (c) Justifier que les B_p pour $p \leqslant n$ sont mutuellement indépendants.
   (d) En admettant que le résultat reste valable pour $p \leqslant n!$, en déduire une expression de P_n.
   (e) Montrer le théorème de Césàro : $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{6}{\pi^2}$. Interpréter ce résultat.

Devoir Libre n° 7 - page 1