# Corrigé du Devoir Libre n° 7

## Exercices 3 et 4

1. On peut définir une probabilité à condition que la famille $\left(\dfrac{\lambda}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit sommable de somme $1$. C'est le cas lorsque $\boxed{s>1 \text{ et } \lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}.}$

2. Il fallait plutôt lire « $n$ est un multiple de $m$ ». $\boxed{\mathbb{P}(A_m) = \dfrac{1}{\zeta(s)}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{(mk)^s} = \dfrac{1}{m^s}.}$

3. Si $p_1,\dots,p_n$ sont premiers, $A_{p_1}\cap\cdots\cap A_{p_n} = A_{p_1\cdots p_n}$.
   Avec la question précédente,
   $$\mathbb{P}\left(A_{p_1}\cap\cdots\cap A_{p_n}\right) = \mathbb{P}\left(A_{p_1\cdots p_n}\right) = \frac{1}{(p_1\cdots p_n)^s} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(A_{p_k}\right).$$
   donc $\boxed{\text{les } A_p \text{ pour } p\in\mathcal{P} \text{ sont mutuellement indépendants.}}$

4. On souhaite montrer que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$. Or $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{P}\left(\overline{A_p}\right)$ qui est un produit infini.
   Mais les $\overline{A_p}$ sont mutuellement indépendants, donc si on considère les $n$ premiers nombres premiers $p_1,\dots,p_n$,
   $$\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\overline{A_{p_k}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_{p_k}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_{p_k}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}}\overline{A_p}\right)$$
   par continuité décroissante.
   Or $n\in\displaystyle\bigcap_{p\in\mathcal{P}}\overline{A_p} \iff n$ n'a aucun diviseur premier $\iff n=1$.
   Donc $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \mathbb{P}(\{1\}) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ et, finalement, $\boxed{\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.}$

5. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln u_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^n \ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ avec $\dfrac{1}{p_n}\to 0$ donc $-\ln\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)\sim\dfrac{1}{p_n}$ donc $(\ln u_n)_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Donc, par continuité de l'exponentielle, $u_n \longrightarrow \ell$.
   Puis, pour tout $s>1$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<1-\dfrac{1}{p_n}\leqslant 1-\dfrac{1}{p_n^s}$, donc $u_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et lorsque $n\to+\infty$, $\ell\geqslant\zeta(s)$.
   Or il est classique que $\zeta(s)\xrightarrow[s\to 1^-]{}+\infty$. En effet, une comparaison série-intégrale permet d'obtenir [1] que $\zeta(s)\underset{s\to1^-}{\sim}\dfrac{1}{s-1}$.
   Autre rédaction possible : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^s}\leqslant\zeta(s)\leqslant\ell$ donc lorsque $s\to 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\leqslant\ell$, ce qui est contradictoire.

1. Le sujet CCINP 2021 le faisait remontrer quelques questions avant

Finalement, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n} \text{ diverge.}}$

6. (a) Le nombre de multiples de $p$ entre $1$ et $n!$ et $\frac{n!}{p}$, donc la probabilité qu'un entier tiré au hasard entre $1$ et $n!$ soit divisible par $p$ vaut $1 - \frac{\frac{n!}{p}}{n!} = \boxed{1 - \frac{1}{p},}$ la probabilité étant uniforme sur $[\![1, n!]\!]$.

(b) $\overline{B_p}$ est l'événement « $p$ est un diviseur commun de $a$ et $b$ », soit $a$ et $b$ s'écrivent respectivement $pa'$ et $pb'$ avec $1 \leqslant a' \leqslant \frac{n!}{p}$ et $1 \leqslant b' \leqslant \frac{n!}{p}$. Comme il y a $(n!)^2$ choix en tout pour $a$ et $b$ avec une probabilité uniforme,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_p) = 1 - \frac{\left(\frac{n!}{p}\right)^2}{(n!)^2} = 1 - \frac{1}{p^2}.}$$

(c) Soient $p_1, \ldots, p_k$ des entiers premiers deux à deux distincts entre $1$ et $n!$. Alors

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_{p_i}} &= \{(a,b) \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, i \in [\![1,k]\!], \ \ p_i | a \text{ et } p_i | b\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{N}^*, \quad p_1 \cdots p_k | a \ \text{ et } \ p_1 \cdots p_k | b\} \end{aligned}$$

Avec un calcul similaire à la question précédente qui n'utilisait pas la primalité de $p$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_{p_i}}\right) = \frac{1}{(p_1 \cdots p_k)^2} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^2} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(\overline{B_{p_i}}\right).$$

Donc les $\left(\overline{B_p}\right)_{p\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants, donc

$$\boxed{\text{les } (B_p)_{p\leqslant n} \text{ sont mutuellement indépendants.}}$$

(d) L'événement « $a$ et $b$ sont premiers entre eux » correspond à $\bigcap_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant n!} B_p$.

Il y a une imprécision dans l'énoncé ici, nous admettons que le résultat précédent reste valable pour les nombres premiers $p \leqslant n!$.

On obtient alors $\boxed{P_n = \prod_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant n!} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).}$

(e) Avec la formule d'Euler, on obtient bien $\boxed{P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{\pi^2}.}$

Interprétation : la probabilité que deux entiers tirés au hasard soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$.

Une démonstration rigoureuse de ce résultat utilise la fonction arithmétique de Möbius et la formule du Crible.