Corrigé du Devoir Libre n° 7

Exercice 2 – Loi du 0-1 de Borel : exercice 31 du TD

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$.

1. La suite $(B_n)_n$ étant croissante pour l'inclusion, par propriété de continuité croissante,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(B).}$$

2. Soit $\mathbb{P}(A_n) \not\to 0$ et alors $\ln(1-\mathbb{P}(A_n)) \not\to 0$ et les deux séries divergent grossièrement, soit $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ et

$$\ln(1-\mathbb{P}(A_n)) \sim \mathbb{P}(A_n) \geqslant 0$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{les deux séries ont même nature.}}$

C'est donc toujours le cas.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'indépendance des A_n,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k)) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right) = \ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right)\right)\\ &= \ln(1-\mathbb{P}(B_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases}\ln(1-\mathbb{P}(B)) & \text{si } \mathbb{P}(B)<1\\ -\infty & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Avec la question précédente, on a bien $\boxed{\mathbb{P}(B) < 1 \text{ si et seulement si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge.}}$

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Alors $(C_n)_n$ est décroissante, donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(I)$.

Posons, pour $n, m \in \mathbb{N}$, $C_n^m = \bigcup_{k=n}^{m} A_k$. Par continuité croissante, $\mathbb{P}(C_n^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \mathbb{P}(C_n)$.

Puis, comme dans la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} \ln(1-\mathbb{P}(A_k)) &= \ln\left(\prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right) = \ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)\right)\\ &= \ln(1-\mathbb{P}(C_n^m)) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \begin{cases}\ln(1-\mathbb{P}(C_n)) & \text{si } \mathbb{P}(C_n)<1\\ -\infty & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

- Si $\mathbb{P}(B) < 1$, alors par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(C_n) < 1$ donc $\sum_{k\geqslant n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))$ converge et

$$1-\mathbb{P}(C_n) = e^{\sum_{k=n}^{+\infty} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$$

comme reste d'une série convergente. On a donc $\mathbb{P}(I) = 0$ par unicité de la limite.

- Si $\mathbb{P}(B) = 1$, avec les deux questions précédentes, $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ diverge, et c'est aussi le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\sum_{k\geqslant n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))$. Comme c'est une série à terme négatifs, $\ln(1-\mathbb{P}(C_n^m)) \xrightarrow[m\to+\infty]{} -\infty$, donc $\mathbb{P}(C_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\mathbb{P}(I) = 1$.

On a donc bien

$$\boxed{P(I) = 0 \text{ si et seulement si } \mathbb{P}(B) < 1, \text{ et } \mathbb{P}(I) = 1 \text{ lorsque ce n'est pas le cas.}}$$