Corrigé du Devoir Libre n° 7

Exercice 1 – Urne de Pólya : exercice 29 du TD

1. Formule de Bayes : (R_1, B_1) est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}$$

(probabilités non nulles vu ce qui suit), chaque tirage se faisant uniformément.

- Au premier tirage, r boules rouges et b boules blanches. $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
- Sachant que R_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient $r + c$ boules rouges et b boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}$.
- Sachant que B_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient r boules rouges et $b + c$ boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|B_1) = \dfrac{r}{r+b+c}$.

Au final, $\mathbb{P}(R_1|R_2) = \dfrac{\dfrac{r+c}{r+b+c} \cdot \dfrac{r}{r+b}}{\dfrac{r+c}{r+b+c} \cdot \dfrac{r}{r+b} + \dfrac{r}{r+b+c} \cdot \dfrac{b}{r+b}} = \dfrac{r+c}{r+c+b}$.

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1|R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}.}$

2. On peut appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, B_1) :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1).$$

Or $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r, b)$ par définition, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
De plus, l'expérience qui consiste à tirer une boule rouge au n^{e} tirage sachant qu'on avait tiré une boule rouge au premier tirage avec r boules rouges et b boules blanches est exactement la même que celle qui consiste à tirer une boule rouge au $n - 1^{\text{e}}$ tirage à partir d'une urne contenant $r + c$ boules rouges et b boules blanches. Ainsi, $\mathbb{P}(R_n|R_1) = p_{n-1}(r + c, b)$. De la même manière, $\mathbb{P}(R_n|B_1) = p_{n-1}(r, b + c)$.

Finalement, $\boxed{p_n(r, b) = \dfrac{r}{r+b}p_{n-1}(r + c, b) + \dfrac{b}{r+b}p_{n-1}(r, b + c).}$

.

3. Par récurrence sur n, on montre que « $\forall\, r, b \in \mathbb{N}^*,\ \ p_n(r, b) = \dfrac{r}{r+b}$ »

En effet, $\mathbb{P}(R_1) = p_1(r, b) = \dfrac{r}{r+b}$ et si on fixe un $n \geqslant 2$ pour lequel on suppose **pour tous** r et b, $p_{n-1}(r, b) = \dfrac{r}{r+b}$, alors d'après la question précédente,

$$p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r+c}{r+c+b} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b+c} = \frac{r}{r+b}$$

ce qui établit la récurrence. Donc $\boxed{\text{pour tout } n,\ \mathbb{P}(R_n) = \dfrac{r}{r+b}.}$

Remarquable ! Même si le contenu de l'urne change, la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ne change pas !

4. De la même manière, si $n > m \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_m \cap R_n | R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_m \cap R_n | B_1)\mathbb{P}(B_1)$, avec $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r,b)$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n | R_1) = p_{m-1,n-1}(r+c,b)$ et $\mathbb{P}(R_m \cap R_n | B_1) = p_{m-1,n-1}(r,b+c)$. Donc
$$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b} p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$
On montre par récurrence sur $m \geqslant 1$ que « **pour tous** r **et** b **et tout** $n > m$**,**
$$\boxed{p_{m,n}(r,b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.}$$ »

Si $m = 1$, si $n > 1$, $p_{1,n}(r,b) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_n) = \mathbb{P}(R_n | R_1)\mathbb{P}(R_1) = p_n(r+c,b)\dfrac{r}{r+b} = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.

Si c'est vrai pour $m-1$, et si $n > m$, alors $n-1 > m-1$ et
$$\begin{aligned} p_{m,n}(r,b) &= \frac{r}{r+b} p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1,n-1}(r,b+c) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} \\ &= \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} \end{aligned}$$
ce qui établit la récurrence.

Remarquable ! A nouveau, c'est indépendant de n **et** m**.**

Via la formule des probabilités composées, on obtient par la même occasion que $\mathbb{P}(R_n | R_m)$ **ne dépendant ni de** n**, ni de** m**.**

---

5. Comme (R_n, B_n) est un système complet d'événements,
$$\boxed{\mathbb{P}(R_m \cap B_n)} = \mathbb{P}(R_m) - \mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r}{r+b} - \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \boxed{\frac{rb}{(r+b)(r+b+c)}.}$$

Même remarque.