DL 3 – Exercice E3A + Problème au choix CCINP ou Mines

Exercice : E3A MP – Algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

1. Démontrer que $\mathscr{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**
   - 2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   - 2.2. Déterminer $\mathfrak{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$
   - 3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.
   - 3.2. Démontrer que $\mathfrak{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.
   - 3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longleftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.
   - 3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathscr{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   - 4.1. Donner la dimension de $\mathscr{H}$.
   - 4.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathscr{H}$.
   - 4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Problème Choix 1 : CCINP – Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

   (b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
   On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
3. On pose pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.
   Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0,1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0,1]$.
4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
   On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série usuelle présente dans le formulaire de développements limités.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.
6. (a) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.

   (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.
7. (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

   (b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I.
   On pourra observer que pour $k \geqslant n+1$, $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

   (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

   (a) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

   (b) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

   (c) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.
9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Problème Choix 2 : Mines-Ponts – Étude spectrale d'un opérateur de transfert

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et T un endomorphisme de V : on dira que le complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un élément f de V non nul tel que $Tf = \lambda f$.
Soit $\mathscr{C}^0$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 1-périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$$

On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbb{R}$ et par D le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0$ engendré par e_0.
Si $f \in \mathscr{C}^0$, on définit $Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right)$. L'objet du problème est l'étude des propriétés spectrales de diverses restrictions de T à des sous-espaces invariants de $\mathscr{C}^0$. On mettra en évidence sur certains de ces sous-espaces la propriété de "trou spectral" : il existe $0 < r < 1$ tel que les valeurs propres autres que 1 sont de module inférieur ou égal à r.

1. Préliminaires.

1. Montrer que si f appartient à $\mathscr{C}^0$ alors Tf aussi.
2. Montrer que pour tout élément f de $\mathscr{C}^0$ on a l'inégalité $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ puis que $\sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty = 1$

   On appelle H° l'hyperplan de $\mathscr{C}^0$ des fonctions f telles que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$
3. Montrer que H° est stable par T.
4. Expliciter la projection P sur D parallèlement à H°.

2. Fonctions trigonométriques.

Pour tout entier relatif k, on note $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ de sorte que e_k est continue et 1-périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à $\mathscr{C}^0$. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \ldots, e_n, e_{-n}$.

5. Déterminer Te_k (respectivement Pe_k) pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont T-stables (respectivement P-stables).

   On note T_n (respectivement P_n) l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P).
6. (5/2) Calculer les valeurs propres de T_2. L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Montrer pour tout entier $p \geqslant k$, l'identité $T_n^p = P_n$.

3. Fonctions höldériennes.

On rappelle que pour tous les réels x et y, $|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|$.
Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle $\mathscr{C}^\alpha$ le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ des fonctions f telles que

$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\} \text{ soit majoré}$$

On notera alors $m_\alpha(f) = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y\right\}$.
On admettra que $\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$ définit une norme sur $\mathscr{C}^\alpha$.

10. Montrer que $\mathscr{C}^\alpha$ est stable par T.
    On notera T_α l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\alpha$ induit par T.
11. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}^\alpha$, $\|T_\alpha f\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha$ puis que $\sup\limits_{\|f\|_\alpha = 1} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$.

Soit λ un nombre complexe de module strictement inférieur à 1.

On pose, pour tout réel x, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}(x)$.

12. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_k \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f_\lambda \in \mathscr{C}^0$ et que $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$.
13. Soit maintenant λ tel que $|\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}$ et deux réels x et y tels que $2^{-n-1} < |x-y| \leqslant 2^{-n}$. En considérant séparément les sommes avec $k \leqslant n$ et $k > n$ dans la série ayant pour valeur $f_\lambda(x) - f_\lambda(y)$, montrer que $f_\lambda \in \mathscr{C}^\alpha$.
14. Montrer que T_α laisse invariant $H^\alpha = H^\circ \cap \mathscr{C}^\alpha$.
15. Soit $f \in \mathscr{C}^0$, montrer que

$$T^n(f)(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$$

16. Etablir, pour $f \in \mathscr{C}^\alpha$, l'inégalité $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left| T_\alpha^n(f)(x) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$.
17. Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier n, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

18. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T_α est la réunion du singleton $\{1\}$ et du disque fermé de centre 0 et de rayon $2^{-\alpha}$ (phénomène de trou spectral).