DL 2 – Sujet CCCINP

Problème : Autour des produits infinis

Si n_0 est un entier naturel et si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ par $P_n = \prod_{p=n_0}^{n} u_p = u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_n$.

On dit que le produit infini $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$, de terme général u_n, converge si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ n'admet pas de limite finie ou si elle converge vers 0, on dit que le produit $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.

A. Généralités et exemples

1. En considérant le quotient $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer que pour que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels non nuls qui converge vers 1.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que les produits infinis $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ et $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ sont de même nature.
3. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs.
   (a) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln u_n$ converge.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   (c) Si, de plus, pour tout entier naturel n on a $0 < u_n < 1$, montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}(1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
4. On pose, dans cette question, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 2}(1+u_n)$ diverge. Qu'en conclut-on ?
5. Déterminer la nature des produits infinis suivants :
   (a) $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)$ (b) $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ pour $x \in]-\pi,\pi[$ (c) $\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ pour $x \in]0,+\infty[$
6. *Application* : Un peu d'histoire...
   (a) Retrouver, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge.
   (b) Si p est un entier naturel tel que $p \geqslant 2$, que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p^k}$?
   (c) On note $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, ...
   Voici un extrait d'un texte écrit par Leonhard Euler (mathématicien suisse) en 1737 (« Introduction à l'analyse infinitésimale ») :
   « *... Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quel que soit le nombre de facteurs infinis ou finis.*
   Par exemple, on aura $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+$etc. *série où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux ; c'est-à-dire toutes les puissances de deux.*
   On aura ensuite $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{18}+$etc. *On ne retrouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 et 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 et 3.*
   Donc, si au lieu de α, β, γ, δ, etc., *on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, et qu'on suppose* $P = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\text{etc.}}$, *on aura* $P = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+$etc., *série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or, comme tous les nombres sont ou des nombres premiers ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs...* »
   Utiliser librement ce texte pour montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{p_n}$ diverge.

B. Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

Pour tout t réel tel que $\sin t \neq 0$, on pose $\operatorname{cotan} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$. On admet la formule suivante (que l'on peut par exemple obtenir à l'aide d'un développement en série de Fourier) : $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\operatorname{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$.

7. Soit $x \in]0,\pi[$. On définit la fonction g sur $[0,x]$ par $g(t) = \operatorname{cotan} t - \dfrac{1}{t}$ si $t \in]0,x]$ et $g(0) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction g est continue sur $[0,x]$.
   (b) Justifier que $\int_\varepsilon^x g(t)\,dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_0^x g(t)\,dt$ puis en déduire la valeur de $\int_0^x g(t)\,dt$.
   (c) Montrer que pour tout $t \in [0,x]$, $g(t) = 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2-n^2\pi^2}$.
   (d) On définit pour tout $N \geqslant 1$ et $t \in [0,x]$, $g_N(t) = 2t\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{t^2-n^2\pi^2}$ et $R_N(t) = g(t)-g_N(t)$. Montrer que pour tout $t \in [0,x]$, $|R_N(t)| \leqslant |R_N(x)|$.
   (e) En déduire que $\int_0^x g_N(t)\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^x g(t)\,dt$.
8. Montrer à l'aide de la question précédente que $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \in]0,\pi[$ et en déduire le développement eulérien de $\sin x$: Pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, $\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.
9. *Application* : Déterminer $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)$ (Formule de Wallis).

Exercice : Applications du théorème de sommation des équivalents $(*)$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

- $a_1 \geqslant 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,
- la suite (a_n) est bornée,
- la série $\sum(a_n)$ diverge.

On note alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\forall n \geqslant 2,\ b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$.

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(n+1)-\ln(n)$, puis **en déduire** en utilisant $(*)$ que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. i. **De façon analogue**, montrer que $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

ii. En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.

iii. Retrouver ces deux résultats par une autre méthode.

3. Étude de deux exemples

i. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

ii. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P). En utilisant la série $\sum(w_n)_{n\geqslant 2}$, déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

i. Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

ii. Prouver que $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

iii. Déterminer alors la nature de la série $\sum(a_n/A_n)_{n\geqslant 2}$.

iv. Déterminer enfin la limite de b_n en $+\infty$.

5. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n = o(u_n)$ et $\sum(v_n)$ diverge.