Programme de colle – MP 1

Compacité

Reprise pour exercices.

Connexité par arcs

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	
Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formule de polarisation : $2\langle x, y\rangle = \\|x+y\\|^2 - \\|x\\|^2 - \\|y\\|^2$.	
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète.	
Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	⇆ PC et SI : mécanique et électricité.

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1, \dots, x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V.	Notation $d(x, V)$.
f) Hyperplans affines d'un espace euclidien	
Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $\lvert\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\rvert$.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Semaines prochaines : Endomorphismes des espaces préhilbertiens, variables aléatoires.

Questions de cours :

(i) Les compacts sont fermés bornés ; les fermés des compacts sont compacts.

(ii) Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.

(iii) Théorème de Heine.

(iv) Un sous-espace de dimension finie est fermé.

(v) Une suite d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Cas des suites bornées en dimension finie.

(vi) Relation d'équivalence des chemins continus. Les convexes et parties étoilées sont connexes par arcs.

(vii) Connexes par arcs de $\mathbb{R}$, image continue d'un connexe par arcs.

(viii) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour une **forme bilinéaire symétrique positive**. Cas d'égalité pour un produit scalaire.

(ix) Lorsqu'il est de dimension finie, l'orthogonal d'un sous-espace est un supplémentaire. Expression du projeté en base orthonormale.

(x) Distance à un sous-espace de dimension finie (atteinte en un vecteur unique et diverses expressions).

(xi) **CCINP 13 (nouvelle banque 2022)**

  (a) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

  (b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

  (c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

  (d) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

    i. Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X], \ \ \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

    ii. Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

(xii) **CCINP 39** : On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

(a) i. Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

ii. Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

(c) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

(xiii) **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

(a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

(b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

(xiv) **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.

(a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

(b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

i. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

ii. Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

(xv) **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que a<b.

(a) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

(b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

(c) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(xvi) **CCINP 80** : Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

(xvii) **CCINP 81** : On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}({}^tAA')$, où $\text{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

(c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

(d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

(xviii) **CCINP 82** : Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

(a) Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

(xix) **CCINP 92** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

(a) Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

i. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

ii. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.