Programme de colle – MP 1

1. Réduction

Révision de la première partie du chapitre, à laquelle s'ajoute

Contenus	Capacités & commentaires
Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.
Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	
Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	
Endomorphismes à polynôme minimal scindé	
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

La notion de polynôme minimal a été ajoutée par rapport à la semaine dernière.

2. Topologie (Limite, continuité, compacité)

Contenus	Capacités & commentaires
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.	
Continuité en un point.	
Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.
f) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. **Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.** **Produit d'une famille finie de compacts.**	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
g) Applications continues sur une partie compacte	
Image d'une partie compacte par une application continue. **Théorème de Heine.**	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
i) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. **Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.** **Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.** Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.	
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemple : déterminant.

Les parties en gras ne seront vues que lundi. Ne pas interroger dessus en début de semaine.

Étude sur quelques exemples de la limite et de la continuité d'une fonction réelle de deux variables réelles : celles des applications partielles sont nécessaires mais non suffisantes. Changement de variable (par composition) par exemple en polaire.

Semaine prochaine : Connexité par arcs, espaces préhilbertiens.

Questions de cours :

(i) Si F est un sous-espace stable, relation entre polynôme caractéristique (révision), polynôme minimal, diagonalisabilité de l'endomorphisme induit par rapport à ceux de l'endomorphisme.
Savoir en déduire les sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.

(ii) Caractérisation de la trigonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé.

(iii) Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue, fonctions continues coïncidant sur une partie dense.

(iv) Caractérisations de la continuité d'une application linéaire (voir aussi CCINP 36).

(v) Si l'espace de départ est de dimension finie, continuité des applications linéaires et bilinéaires.

(vi) Les compacts sont fermés bornés ; les fermés des compacts sont compacts. (Voir aussi CCINP 13).

(vii) **(à partir de mardi)** Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.

(viii) **(à partir de mardi)** Théorème de Heine.

(ix) **(à partir de mardi)** Un sous-espace de dimension finie est fermé.

(x) **CCINP 13 (nouvelle banque 2022)**

(a) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

(b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

(c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

(d) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

i. Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \ \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

ii. Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E? Justifier.

(xi) **CCINP 35** : E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

(a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

(b) Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

(xii) **CCINP 36** : Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E.

P2. f est continue en 0_E.

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

(b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
Démontrer que φ est linéaire et continue.

(xiii) **CCINP 41** : Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

(a) On utilisera au moins une fois des suites.

(b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.

(c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

(xiv) **CCINP 88** :

(a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$.

i. Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

ii. u est-il diagonalisable ?
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question a).

(xv) **CCINP 91** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

(b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A. Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.