chapitreXXIII

Espaces préhilbertiens réels (MPSI)

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I Produit scalaire et norme euclidienne

1 Définition d'un produit scalaire

Définition : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.

C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot) : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité** :
- **Linéarité à gauche :** Pour tout $y\in E$, l'application $x\mapsto (x|y)$ est linéaire sur E
- **Linéarité à droite :** Pour tout $x\in E$, l'application $y\mapsto (x|y)$ est linéaire sur E

(ii) **Symétrie** : $\forall\,(x,y)\in E^2,\quad (x|y)=(y|x)$.

(iii) **Définie-positivité** :
- **Positivité :** $\forall\, x\in E,\quad (x|x)\geqslant 0$;
- **Caractère défini :** $\forall\, x\in E,\quad (x|x)=0 \Rightarrow x=0$.

Définition : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E,(\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E,(\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition - Propriété

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$, on définit

$$(x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

Définition - Propriété

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B)=\mathrm{tr}\left(A^{\mathsf{T}}\times B\right).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition - Propriété

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g)=\int_a^b fg$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition : Norme euclidienne

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel.

Pour tout vecteur x de E, on pose $\|x\|=\sqrt{(x|x)}$.

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E,

(i) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2(x|y)+\|y\|^2$

(ii) $\|x-y\|^2=\|x\|^2-2(x|y)+\|y\|^2$

(iii) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme)*

Propriété : Identités de polarisation

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E,

(i) $(x|y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$

(ii) $(x|y)=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall\, x,y\in E,\quad (x|y)^2\leqslant (x|x)(y|y) \qquad \textit{ie} \qquad |(x|y)|\leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad x=\lambda y$)

d Inégalité triangulaire

Corollaire : Inégalité de Minkowski

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall\, x,y\in E,\quad \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

*avec égalité si et seulement si x et y sont **positivement liés** (ie $y=0$ ou $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+,\ x=\lambda y$)*

De plus,

$$\forall\, x,y\in E,\quad \big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

e Norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Propriété

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Définition : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta\in[0,\pi]\ \text{ et }\ \cos\theta=\frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Définition : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x\in E$, on définit la distance de x à A par $\mathrm{d}(x,A)=\inf_{y\in A}\big(\mathrm{d}(x,y)\big)=\inf_{y\in A}\|x-y\|$.

II Orthogonalité

1 Vecteurs orthogonaux

Définition : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.

x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y)=0$. On écrit parfois $x\perp y$.

2 Famille orthonormale

Définition : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1,\dots,v_p)\in E^p$.

$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall\, i,j\in[\![1,p]\!],\text{ avec } i\neq j,\quad (v_i|v_j)=0\quad(\text{ie } v_i\perp v_j).$$

$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall\, i,j\in[\![1,p]\!],\quad (v_i|v_j)=\delta_{i,j}$$

Propriété

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.

Corollaire

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}v_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{p}\|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p\geqslant 3$.

3 Ensembles orthogonaux

Définition : Parties orthogonales

Soient $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel et A,B des parties non vides de E.

On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall\,(a,b)\in A\times B,\ \ (a|b)=0$. On note $A\perp B$.

Propriété

Si $A,B\in\mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A\cap B=\varnothing$ ou $A\cap B=\{0_E\}$.

4 Orthogonal d'un sous-espace

Définition : Orthogonal d'un sous-espace

Soient $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vecotiel de E. On définit l'**orthogonal de** F comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^\perp=\{x\in E\mid\forall\,y\in F,\ \ (x|y)=0\}$$

$$x\in F^\perp\iff x\in E\text{ et }\forall\,y\in F,\ \ (x|y)=0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F.

Propriété

Soient $(E, | \ )$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectorielde E.
$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.
Si $F = \mathrm{Vect}\, A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^\perp \iff \forall\, a \in A, \quad (x|a) = 0$$

Propriété

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

(i) $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.

(ii) $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,

(iii) La somme est directe : $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \textcircled{\perp} F^\perp$,

(iv) Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$,

(v) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.

III Espaces ou sous-espaces euclidiens

1 Base orthonormale

Théorème

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

Définition : Orthonormalisation de Schmidt

Étant donné $(E, \ |)$ un espace euclidien, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall\, i < j, \quad (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Propriété

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.
On a alors $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une b.o.n de E.

Corollaire

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Corollaire : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété

Soit $(E, | \ )$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une **base orthonormale** *de E : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = (e_i | x) \qquad (x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^\top \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^\top \times X} \qquad \mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

3 Isomorphisme avec le dual

Théorème : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.
Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

4 Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.

Propriété

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale ***directe*** *de E, $\det_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.*

Définition : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.
On le note $[v_1, \ldots, v_n]$, pour $v_1, \ldots, v_n \in E$.

Propriétés

(i) *$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto [v_1, \ldots, v_n]$ est une forme n-linéaire alternée sur E.*

(ii) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une bond, $[e_1, \ldots, e_n] = 1$ et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une boni, $[e_1, \ldots, e_n] = -1$ (réciproque fausse).*

(iii) $[v_1,\ldots,v_n]=0$ si et seulement si $(v_1,\ldots,v_n)$ est liée.
(iv) Si $u\in\mathscr{L}(E)$, $[u(v_1),\ldots,u(v_n)]=\det u\times[v_1,\ldots,v_n]$.

Propriété

Soit E euclidien orienté.

(i) Si $\dim E=2$, $[\vec{u},\vec{v}]$ représente le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(ii) Si $\dim E=3$, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

5 Propriétés de $F^{\perp}$

Théorème

*Si F est un sev de **dimension finie** de E préhilbertien réel, alors*

$$E=F\oplus F^{\perp}=F\overset{\perp}{\oplus}F^{\perp}$$

*Le sev $F^{\perp}$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** de F, il est unique.*

Corollaire

*Soit E un espace **euclidien**, F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(i) $\dim F^{\perp}=\dim E-\dim F$
(ii) $(F^{\perp})^{\perp}=F$
(iii) $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$
(iv) $(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}$

6 Projections et symétries orthogonales

a Projections orthogonales

Définition : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Propriétés

(i) $p_F\in\mathscr{L}(E)$
(ii) $p_F^2=p_F$
(iii) $F=\operatorname{Im}p_F=\operatorname{Ker}(p_F-id_E)$
(iv) $F^{\perp}=\operatorname{Ker}p_F$
(v) $\operatorname{Im}p_F\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Ker}p_F=E$
(vi) $\forall x\in E,\quad p_F(x)\in F$ et $x-p_F(x)\in F^{\perp}$.

Propriété : Expression en base orthonormale

*Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1,\ldots,e_p)$ une **base orthonormale** de F. Alors*

$$\forall x\in E,\quad p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}(e_i|x)e_i$$

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

Cas particulier

- Projection orthogonale sur une droite : $D=\mathbb{R}a$, où $a\neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et

$$p_D: x\mapsto\left(\frac{1}{\|a\|}a\Big|x\right)\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)=\frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- Projection orthogonale sur un hyperplan : $H=(\mathbb{R}a)^{\perp}$, où $a\neq 0_E$.

$$p_H: x\mapsto x-\frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

Propriété : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x\in E,\quad \|p_F(x)\|\leqslant\|x\|$$

b Symétries orthogonales

Définition : Symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **symétrie orthogonales par rapport à** F, notée s_F, la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^{\perp}$.

Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Propriétés

(i) $s_F\in\mathscr{L}(E)$
(ii) $s_F\circ s_F=id_E$
(iii) $\operatorname{Ker}(s_F-id_E)=F$
(iv) $\operatorname{Ker}(s_F+id_E)=F^{\perp}$
(v) $s_F=2p_F-id_E$.
(vi) $s_F=p_F-p_{F^{\perp}}$

À savoir retrouver :

Propriété : Expression d'une réflexion

Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de $H^{\perp}$.

$$\forall x\in E,\quad s_H(x)=x-2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

7 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$

Propriété

Soit F est un sous-espace vectoriel ***de dimension finie*** *d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.*

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x,p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F) = \|x-y\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une b.o.n. de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

8 Hyperplans affines d'un espace euclidien

Définition : Vecteur normal

Soit $\mathscr{H} = \mathrm{A} + \vec{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E, A étant un point de E et $\vec{H}$ un hyperplan linéaire.

On appelle **vecteur normal** à $\mathscr{H}$, tout vecteur $\vec{n}$ de $\vec{H}^\perp \setminus \{0_E\}$.

Propriétés

(i) Tous les vecteurs normaux de $\mathscr{H}$ sont colinéaires.

(ii) Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{H}$, $\mathrm{M} \in \mathscr{H} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n}$.

Corollaire

Soit $\mathscr{B}(e_1,\dots,e_n)$ une ***base orthonormale*** *de E, $\mathscr{R} = (\mathrm{O},\mathscr{B})$ un repère orthonormal.*

$\vec{n}(a_1,\dots,a_n)$ est un vecteur normal de $\mathscr{H}$ si et seulement si $\mathscr{H}$ a une équation de la forme $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ dans $\mathscr{R}$.

Propriété : Distance à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de E euclidien.

Soit A un point de $\mathscr{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à E.

$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{H}) = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ est une équation de $\mathscr{H}$ en repère orthonormal et si $\mathrm{M}(x_1,\dots,x_n)$, alors

$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{H}) = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$