chapitreXXII

Limite, continuité, compacité et connexité par arcs

On se donne $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$, $(G,\|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d_E, d_F, d_G les distances associées à la norme pour chaque espace.

On fixe A et B des parties non vides de E et F respectivement.

I Limite

1 Limite en un point

Soit $f\in F^A$, $a\in\overline{A}$, $b\in F$.

Définition

On dit que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ lorsque pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in A$,

$$d_E(x,a)=\|x-a\|_E\leqslant\eta\Longrightarrow d_F(f(x),b)=\|f(x)-b\|_F\leqslant\varepsilon$$

Propriété

Si f admet b comme limite en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété : Caractérisation séquentielle

$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout suite $(a_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n\to a$, $f(a_n)\to b$.

Propriété : Unicité de la limite

Si $f\xrightarrow[x\to a]{} b$ et $f\xrightarrow[x\to a]{} b'$, alors $b=b'$.

Propriété

Si $g\in\mathbb{R}^A$ telle que $g(x)\xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si, au voisinage de a, $\|f(x)-b\|\leqslant g(x)$ alors $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$.

Propriété

Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, $\|f(x)\|_F\xrightarrow[x\to a]{}\|b\|_F$.

2 Cas où F est de dimension finie

Propriété

Si F est de dimension finie n, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de F, $f\in F^A$, $b=\sum_{k=1}^n b_k e_k\in F$.

On note $f_k\in\mathbb{K}^A$ tel que pour tout $x\in A$, $f(x)=\sum_{k=1}^n f_k(x)e_k$.

Alors $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $f_k(x)\xrightarrow[x\to a]{} b_k$.

3 Fonction à valeurs dans un espace produit

Propriété

Si $(F_1,N_1),\dots,(F_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on munit $F_1\times\dots\times F_p$ de la norme produit N.

Si $f\in(F_1\times\dots\times F_p)^A$, $a\in\overline{A}$. Pour $i\in[\![1,p]\!]$, on pose $f_i\in F_i^A$ tel que $f:x\mapsto(f_1(x),\dots,f_p(x))$.

Soit $b=(b_1,\dots,b_p)\in F_1\times\dots\times F_p$.

Alors $f\xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $f_i(x)\xrightarrow[x\to a]{} b_i$.

4 Opérations algébriques

La caractérisation séquentielle permet de prouver facilement les propriétés sur les opérations algébriques sur les limites.

Propriété

Soient $f,g\in F^A$, $h\in\mathbb{K}^A$ telles que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b\in F$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{} b'\in F$, $h(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha\in\mathbb{K}$.

(i) Si $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $f+\lambda g\xrightarrow[x\to a]{} b+\lambda b'$.

(ii) $h(x)\cdot f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha\cdot b$.

(iii) Si $\alpha\neq 0$ et h ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{1}{h(x)}\xrightarrow[x\to a]{}\dfrac{1}{\alpha}$.

Propriété

Si $f\in F^A$, telle que $f(A)\subset B$, $g\in G^B$, $a\in\overline{A}$, $b\in\overline{B}$, $c\in G$ tels que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, $g(y)\xrightarrow[y\to b]{} c$ alors $g\circ f(x)\xrightarrow[x\to a]{} c$.

5 Extension à l'infini

Définition

Si A non bornée, $f\in F^A$, $b\in F$.

On dit que $f(x)\xrightarrow[\|x\|_E\to+\infty]{} b$ lorsque

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ \|x\|_E\geqslant M\Longrightarrow\|f(x)-b\|_F\leqslant\varepsilon$$

Définition

Si $A\subset\mathbb{R}$, $f\in F^A$, $b\in F$.

(i) Si A n'est pas majorée, on dit que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ lorsque

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ x\geqslant M\Longrightarrow\|f(x)-b\|_F\leqslant\varepsilon$$

(ii) Si A n'est pas minorée, on dit que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{} b$ lorsque $f(-x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ x\leqslant M\Longrightarrow\|f(x)-b\|_F\leqslant\varepsilon$$

Définition

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in \overline{A}$.

(i) On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

(ii) On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ lorsque $-f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$

II Relations de comparaison

Définition

Soit $f, g \in F^A$ où A partie de E, $\varphi \in \mathbb{R}^A$, $a \in \overline{A}$. Si A est une partie non minorée ou non majorée de $\mathbb{R}$, a peut aussi être $\pm\infty$.

- f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(\varphi(x))$ lorsqu'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que
$$\forall x \in V \cap A, \ \|f(x)\|_E \leqslant M|\varphi(x)|.$$
Cela revient à dire que $\|f\|_E = \mathcal{O}(|\varphi|)$.
Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $x \mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$ est bornée au voisinage de a.
- f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que
$$\forall x \in V \cap A, \ \|f(x)\|_E \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|.$$
Cela revient à dire que $\|f\|_E = \mathrm{o}(|\varphi|)$.
Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $\dfrac{1}{\varphi(x)} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f - g$ est négligeable devant $\|f\|$ ou devant $\|g\|$ (cela revient au même) au voisinage de a :
$$f - g = \mathrm{o}(\|f\|) \text{ ou } \mathrm{o}(\|g\|).$$

III Continuité

1 En un point, sur une partie

Soient $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$.

Définition : Continuité

f est **continue en** a lorsque f admet une limite (finie) en a.

f est **continue sur** A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Propriété

Si f est continue en a, la limite de f en a vaut $f(a)$.

Propriété : Caractérisations séquentielles

f est continue en a si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a, \ f(a_n) \to f(a)$$

si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a, \ (f(a_n)) \text{ converge.}$$

Propriété : Opérations

- *Si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ l'est aussi.*
- *Toute combinaison linéaire, toute composée de fonctions continues est continue.*
- *Si $f : A \to F$ et $h : A \to \mathbb{K}$ sont continues, $h \cdot f$ l'est aussi. Si h ne s'annule pas, $\frac{1}{h} \cdot f$ l'est aussi.*

2 Continuité et topologie

Propriété

L'image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé) relatif de l'ensemble de départ.

Propriété

Des applications continues coïncidant sur des parties denses sont égales.

3 Uniforme continuité

Définition

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{F}$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si
$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x, y \in A,$
$$\|x-y\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Propriété

Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A. Réciproque fausse.

Propriété

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

4 Fonctions lipschitziennes

Définition

$f : A \subset E \to F$ est dite k-lipschitzienne sur A (où $k \in \mathbb{R}_+^*$ si

$$\forall\, x, y \in A,\ \ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

Propriété

Toute fonction lipschitzienne sur A y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Définition : distance à une partie

Si A est une partie non vide de E, $x \in E$, on appelle **distance de x à A** le réel $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$ qui est bien défini.

Propriété

$\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}\right.$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.

C'est en particulier le cas de $x \mapsto d(x, a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

5 Applications linéaires

Propriété : Continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue sur E.

(ii) u est continue en 0_E.

*(iii) **Il existe** $C \in \mathbb{R}_+^*$ **tel que pour tout** $x \in E$,*

$$\|u(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E.$$

(iv) u est lipschitzienne sur E.

(v) u est uniformément continue sur E.

Définition

On note $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F) \cap \mathscr{C}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E.

Méthode : Étudier la continuité d'une application linéaire en dimension infinie

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E$.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$.)

IV Dimension finie

1 Coordonnées

Propriété

On suppose F de dimension finie $n > 1$.

Soit A une partie non vide de E, $f \in F^A$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. On pose $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est continue sur A.

2 Applications linéaires

Théorème

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue sur E.

Autrement dit, $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$.

3 Applications polynomiales

Définition

Soit $f : E \to \mathbb{K}$, où E est de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

f est dite **monomiale** s'il existe $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}^p$ tels que $f : x \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$.

f est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions monomiales.

Propriété

Toute fonction polynomiale sur E de dimension finie est continue.

4 Applications multilinéaires

Propriété : Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(G, \|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Propriété : Généralisation

Plus généralement, toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.

V Compacité

1 Suites extraites

Définition : Suite extraite

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in E^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme

Si φ est une extractrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Propriété

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans E) de suite extraite de u.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Réciproque fausse.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

2 Parties compactes

Définition : de Bolzano-Weierstrß

Une partie K de E est dite **compacte** (ou est **un compact**) lorsque toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence **dans** K, c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite qui converge dans K.

Propriété

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Propriété

Soit K une partie compacte de E et A une partie de K. Si A est fermée, alors A est compacte.

a Produit de compacts

Propriété

Si $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p))$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et pour $i \in [\![1, p]\!]$, K_i compact de E_i, alors $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme produit.

3 Fonctions continues sur des compacts

Propriété : Image continue d'un compact

Si $f : K \to F$ avec K partie compacte de E et f continue, alors $f(K)$ est compacte.

Corollaire : théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un compact de E, à valeur réelles, est bornée et atteint ses bornes.

Théorème : de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

4 Cas de la dimension finie

a $\mathbb{K}$

On a déjà vu que les segments de $\mathbb{R}$ étaient des compacts de $\mathbb{R}$.

Le théorème de Bolzano Weierstrß permet de démontrer le résultat suivant, généralisé un peu plus loin.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß

De toutes suite bornée d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire

Les compacts du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}$.

b Équivalence des normes

Théorème

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

c Compacts en dimension finie

Théorème

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.

Corollaire

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire : important !

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

5 Suites convergente dans un compact

Propriété

Soit K un compact. Une suite d'éléments de K est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire

***En dimension finie**, toute suite **bornée** converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

VI Connexité par arcs

1 Une relation d'équivalence

Définition : chemin continu

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Si $(a,b) \in A^2$, on appelle **chemin continu** joignant a à b dans A toute application $\phi : [0,1] \mapsto E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- ϕ est continue
- $\forall t \in [0,1], \quad \phi(t) \in A$
- $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$

Propriété

La relation $\mathscr{R}$ sur A^2 « sont joints par un chemin continu » est une relation d'équivalence.

2 Connexité par arcs

Définition : Composantes connexes par arcs

Soit A une partie de E. On appelle **composantes connexes par arcs** de A les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ définie précédemment.

Propriété

Les composantes connexes par arcs de A partitionnent A.

Définition : partie connexe par arcs

On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs : A elle-même.

Propriété : convexe $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Définition : Partie étoilée

A est dite étoilée s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout point b de A, le segment $[a,b]$ est inclus dans A.

Propriété : étoilée $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

3 Cas des parties de $\mathbb{R}$

Propriété

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

4 Image continue d'une partie connexe par arcs

Propriété

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \to F$ une application continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Corollaire

Si f est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est un intervalle.

Autrement dit, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : s'il existe $a \in A$ tel que $\phi(a) = \alpha$ et $b \in A$ tel que $\phi(b) = \beta$, alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in A$ tel que $\phi(c) = \gamma$.