chapitreXXII

Limite, continuité, compacité et connexité par arcs

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.	
Continuité en un point.	
Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.
Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.
f) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
Une partie compacte est fermée et bornée.	
Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.	
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.	
Produit d'une famille finie de compacts.	
g) Applications continues sur une partie compacte	
Image d'une partie compacte par une application continue.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
Théorème de Heine.	
h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	
Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
i) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.	Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.	
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.	
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemple : déterminant.

Table des matières

XXII Limite, continuité, compacité et connexité par arcs

I Limite 3
1 Limite en un point 3
2 Cas où F est de dimension finie 4
3 Fonction à valeurs dans un espace produit 4
4 Opérations algébriques 4
5 Extension à l'infini 5

II Relations de comparaison 6

III Continuité 7
1 En un point, sur une partie 7
2 Continuité et topologie 8
3 Uniforme continuité 10
4 Fonctions lipschitziennes 11
5 Applications linéaires 12

IV Dimension finie 14
1 Coordonnées 14
2 Applications linéaires 14
3 Applications polynomiales 14
4 Applications multilinéaires 15

V Compacité 15
1 Suites extraites 15
2 Parties compactes 16
a Définition 16
b Un compact est fermé borné 17
c Partie fermée d'un compact 18
d Produit de compacts 18
3 Fonctions continues sur des compacts 19
a Théorème de Heine 19
4 Cas de la dimension finie 20
a $\mathbb{K}$ 20
b Équivalence des normes 20
c Compacts en dimension finie 21
5 Suites convergente dans un compact 23

VI Connexité par arcs 23
1 Une relation d'équivalence . . . 23
2 Connexité par arcs . . . 24
3 Cas des parties de $\mathbb{R}$ . . . 25
4 Image continue d'une partie connexe par arcs . . . 26

On se donne $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d_E, d_F, d_G les distances associées à la norme pour chaque espace.

On fixe A et B des parties non vides de E et F respectivement.

I Limite

1 Limite en un point

Soit $f \in F^A$, $a \in \overline{A}$, $b \in F$.

Définition

On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in A$,

$$d_E(x, a) = \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow d_F(f(x), b) = \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarques

R 1 – Définitions équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \in B_E(a, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B_F(b, \varepsilon)$$

$$\forall V \text{ voisinage de } b, \quad \exists W \text{ voisinage de } a, \quad f(A \cap W) \subset V$$

$$\forall V \text{ voisinage de } b, \quad \exists W' \text{ voisinage de } a \textbf{ dans } A, \quad f(W') \subset V$$

$$\left\|f(x) - b\right\| \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

$$f(a + h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} b$$

R 2 – Cette définition dépend des normes. Mais en changeant une norme en une norme équivalente on ne change pas la définition.

Propriété

Si f admet b comme limite en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration

Appliquer la définition avec $\varepsilon = 1$. □

Propriété : Caractérisation séquentielle

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si pour tout suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$.

Démonstration

Semblable au cas numérique.

- $(\Longrightarrow)$: Soit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \to a$.
  Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leqslant \eta$, $\left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon$.
  On a aussi $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $\|a_n - a\|_E \leqslant \eta$. Alors si $n \geqslant N$, $\left|f(a_n) - b\right| \leqslant \varepsilon$.
  En résumé : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|f(a_n) - b\right| \leqslant \varepsilon$.
- $(\Longleftarrow)$: par contraposée,
  Si $f(x) \not\to b$, alors on a $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, on a $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leqslant \eta$ et $\left\|f(x) - b\right\|_F > \varepsilon$.
  Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\eta = \frac{1}{n+1}$, on a $a_n \in A$ tel que $|a_n - a| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\left\|f(a_n) - b\right\|_F > \varepsilon$.
  Alors $a_n \to a$ et pourtant $f(a_n) \not\to b$. □

Propriété : Unicité de la limite

Si $f \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $f \xrightarrow[x\to a]{} b'$, alors $b = b'$.

Démonstration

Comme $a \in \overline{A}$, on a une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$. alors $f(a_n) \to b$ et $f(a_n) \to b'$ donc par unicité de la limite des suites, $b = b'$. □

Propriété

Si $g \in \mathbb{R}^A$ telle que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si, au voisinage de a, $\|f(x) - b\| \leqslant g(x)$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Démonstration

Si $a_n \to a$, à partir d'un certain rang N, $\|f(a_n) - b\| \leqslant g(a_n) \to 0$ donc $f(a_n) \to b$ donc par caractérisation séquentielle, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$. □

Propriété

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $\|f(x)\|_F \xrightarrow[x\to a]{} \|b\|_F$.

2 Cas où F est de dimension finie

Propriété

Si F est de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F, $f \in F^A$, $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in F$.

On note $f_k \in \mathbb{K}^A$ tel que pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_k$.

Démonstration

Toutes les normes sont équivalentes : utiliser $\|\cdot\|_1$. □

3 Fonction à valeurs dans un espace produit

Propriété

Si $(F_1, N_1), \dots, (F_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on munit $F_1 \times \cdots \times F_p$ de la norme produit N.

Si $f \in (F_1 \times \cdots \times F_p)^A$, $a \in \overline{A}$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $f_i \in F_i^A$ tel que $f : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$.

Soit $b = (b_1, \dots, b_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

Alors $f \xrightarrow[x\to a]{} b$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_i$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle et la propriété connue pour les suites. □

4 Opérations algébriques

La caractérisation séquentielle permet de prouver facilement les propriétés sur les opérations algébriques sur les limites.

Propriété

Soient $f, g \in F^A$, $h \in \mathbb{K}^A$ telles que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in F$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} b' \in F$, $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + \lambda g \xrightarrow[x\to a]{} b + \lambda b'$.

(ii) $h(x) \cdot f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha \cdot b$.

(iii) Si $\alpha \neq 0$ et h ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{1}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\alpha}$.

Propriété

Si $f \in F^A$, telle que $f(A) \subset B$, $g \in G^B$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in G$ tels que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$.

Exemples

E 1 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ en $(0, 0)$. $f(x, 0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: s'il y a une limite, c'est 0. $f(0, y) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ aussi mais cela ne suffit pas !
$|f(x), y)| \leqslant |x| + |y| \to 0$.
Autre méthode : changement de variable en polaire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$.
$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \to 0$.

E 2 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{|x - y|}$ en $(0, 0)$. $f(0, y) \to 0$ et $f(x, x+x^2) \to 1$ donc pas de limite (par composition ou par caractérisation séquentielle).

5 Extension à l'infini

Définition

Si A non bornée, $f \in F^A$, $b \in F$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E \to +\infty]{} b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \|x\|_E \geqslant M \Longrightarrow \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

Définition

Si $A \subset \mathbb{R}$, $f \in F^A$, $b \in F$.

(i) Si A n'est pas majorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M \Longrightarrow \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

(ii) Si A n'est pas minorée, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} b$ lorsque $f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M \Longrightarrow \left\|f(x) - b\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

Définition

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in \overline{A}$.

(i) On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

(ii) On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ lorsque $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$

Remarques

R 1 – Reste les définitions vues en première année de $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$ lorsque $E=F=\mathbb{R}$:

- Pour A majorée
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
  $$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists M'\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ x\geqslant M' \Longrightarrow f(x)\geqslant M.$$
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ie
  $$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists M'\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ x\geqslant M' \Longrightarrow f(x)\leqslant M.$$
- Pour A minorée
  - ⋆ $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ ssi $f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ie
  $$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists M'\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ x\leqslant M' \Longrightarrow f(x)\geqslant M.$$
  - ⋆ Pour A minorée : $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ ssi $-f(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, , ie
  $$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists M'\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ x\leqslant M' \Longrightarrow f(x)\leqslant M.$$

R 2 – On définit de même $f(x) \xrightarrow[\|x\|_E\to+\infty]{} \pm\infty$.

R 3 – La caractérisation séquentielle de la limite est encore valable pour l'infini, avec une démonstration similaire.

R 4 – On peut unifier toutes ces définitions en introduisant une notion de voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}$: un voisinage de $+\infty$ est une partie V telle qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $]M,+\infty[\subset V$, un voisinage de $-\infty$ est une partie V telle qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $]-\infty,M[\subset V$.
Alors toutes les définitions de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ s'écrivent
$$\forall V \text{ voisinage de } b,\ \exists W \text{ voisinage de } a,\ \ f(A\cap W)\subset V$$

II Relations de comparaison

Définition

Soit $f,g\in F^A$ où A partie de E, $\varphi\in\mathbb{R}^A$, $a\in\overline{A}$. Si A est une partie non minorée ou non majorée de $\mathbb{R}$, a peut aussi être $\pm\infty$.

- f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(\varphi(x))$ lorsqu'il existe un réel M et un voisinage V de a tel que
$$\forall x\in V\cap A,\ \ \|f(x)\|_E\leqslant M\,|\varphi(x)|.$$
Cela revient à dire que $\|f\|_E=\mathcal{O}(|\varphi|)$.
Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $x\mapsto \dfrac{1}{\varphi(x)}f(x)$ est bornée au voisinage de a.
- f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, et on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\varphi(x))$ lorsque pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage V de a tel que
$$\forall x\in V\cap A,\ \ \|f(x)\|_E\leqslant \varepsilon\,|\varphi(x)|.$$
Cela revient à dire que $\|f\|_E=\mathrm{o}(|\varphi|)$.
Lorsque φ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), cela revient à dire que $\dfrac{1}{\varphi(x)}f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $f-g$ est négligeable devant $\|f\|$ ou devant $\|g\|$ (cela revient au même) au voisinage de a :
$$f-g=\mathrm{o}(\|f\|)\ \text{ou}\ \mathrm{o}(\|g\|).$$

III Continuité

1 En un point, sur une partie

Soient $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$.

Définition : Continuité

f est **continue en** a lorsque f admet une limite (finie) en a.
f est **continue sur** A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Propriété

Si f est continue en a, la limite de f en a vaut $f(a)$.

Démonstration

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $\|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$: en particulier, pour $x = a$, $\forall \varepsilon > 0$, $\|f(a) - \ell\| \leqslant \varepsilon$. □

Propriété : Caractérisations séquentielles

f est continue en a si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a)$$

si et seulement si

$$\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to a,\ (f(a_n)) \text{ converge.}$$

Démonstration

La première est une conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la limite.
Pour la deuxième :

- $(\Longrightarrow)$: Si f est continue en a, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ donc la conclusion découle de la caractérisation séquentielle de la limite.
- $(\Longleftarrow)$: Si pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge, soient deux telles suites (a_n) et (b_n), et ℓ et ℓ' tel que $f(a_n) \to \ell$ et $f(b_n) \to \ell'$.
  Alors en considérant la suite (c_n) telle que $c_n = a_n$ si n est pair et $c_n = b_n$ si n est impair, $c_n \to a$ car $c_{2n} \to a$ et $c_{2n+1} \to a$ en tant que suites extraites de (a_n) et de (b_n).
  Donc on a ℓ'' tel que $f(c_n) \to \ell'$ et par extraction et unicité de la limite, $\ell = \ell'' = \ell'$.
  Finalement, pour toute suite (a_n) telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))$ converge vers une même limite ℓ donc f converge en a d'après la caractérisation séquentielle, donc f est continue en a. □

Propriété : Opérations

- *Si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ l'est aussi.*
- *Toute combinaison linéaire, toute composée de fonctions continues est continue.*
- *Si $f : A \to F$ et $h : A \to \mathbb{K}$ sont continues, $h \cdot f$ l'est aussi. Si h ne s'annule pas, $\frac{1}{h} \cdot f$ l'est aussi.*

Démonstration

Conséquences immédiates des propriétés de la limite. □

Remarque

$\mathscr{C}(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

E 1 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon, est discontinue en $(0, 0)$ malgré la continuité des applications partielles, mais continue ailleurs.

E 2 – $f : (x, y) \mapsto \dfrac{y^2}{|x|+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon, est discontinue en $(0, 0)$ vu les applications partielles, mais continue ailleurs.

2 Continuité et topologie

Propriété

L'image réciproque d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé) relatif de l'ensemble de départ.

Remarque

Rappel : $f^{(-1)}\left({}^cB\right) = {}^c\left(f^{(-1)}(B)\right)$.

Démonstration

$f : A \to F$

- Si B fermé de F, soit $(a_n) \in f^{(-1)}(B)$ une suite convergeant vers $a \in A$. Alors $f(a_n) \in B \to f(a)$ par continuité donc $f(a) \in B$ car B est fermé, donc $a \in f^{(-1)}(B)$.
- Pour les ouverts, il suffit de passer au complémentaire avec le rappel.
  Mais il n'est pas inintéressant de faire une preuve directe : si $\mathcal{O}$ ouvert de F, on veut montrer que $f^{(-1)}(\mathcal{O})$ est un ouvert de E.
  Soit $a \in f^{(-1)}(\mathcal{O})$. Alors $f(a) \in \mathcal{O}$ ouvert donc on a $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
  Par continuité, on a $\eta > 0$ tel que $x \in A \cap B(a, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.
  Donc $A \cap B(a, \eta) \subset f^{(-1)}(B(f(a), \varepsilon)) \subset f^{(-1)}(\mathcal{O})$ et $f^{(-1)}(\mathcal{O})$ est ouvert. □

Exemple

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Remarques

R 1 – Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in A,\ f(x) > a\}$ et $\{x \in A,\ f(x) < a\}$ sont des ouverts, $\{x \in A,\ f(x) \geqslant a\}$, $\{x \in A,\ f(x) \leqslant a\}$ et $\{x \in A,\ f(x) = a\}$ sont des fermés.

R 2 – Ce n'est plus vrai pour les images directes. Exemples : $\sin(]0, 4\pi[)$ et $\mathrm{Arctan}(\mathbb{R})$.

Exercice : CCINP 41

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. **On utilisera au moins une fois des suites.**
2. **On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.**
3. **Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.**

---

1. Soit E et F deux espaces vectoriels normés.
   Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue.
   L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E.
   Exemple : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'appli-

cation continue $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto xy \end{array}$.

2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit $F \subset E$.
   F est un fermé de E si et seulement si $\complement_E F$ est un ouvert de E.
   Exemple : $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 \geqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car $\complement_{\mathbb{R}^2} B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   En effet, $\complement_{\mathbb{R}^2} B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 < 1\} = B_o(0,1)$ où $B_o(0,1)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
   Puis, comme toute boule ouverte est un ouvert, on en déduit que $\complement_{\mathbb{R}^2} B$ est un ouvert.

3. Caractérisation séquentielle des fermés :
   Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.
   A est un fermé de E si et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, alors $x \in A$.
   Exemple : $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, xy \geqslant 1\}$ est un fermé.

   En effet, soit $\left((x_n, y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de C qui converge vers (x,y).
   $\forall \, n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n \geqslant 1$, donc, par passage à la limite, $xy \geqslant 1$ donc $(x,y) \in C$.
4. Une intersection de fermés d'un espace vectoriel normé E est un fermé de E.
   Exemple : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, xy \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$.

   On pose $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, xy \geqslant 1\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x \geqslant 0\}$.
   D'après 3., D_1 est un fermé.
   D_2 est également un fermé.

   En effet, D_2 est l'image réciproque du fermé $[0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x \end{array}$.

   On en déduit que $D = D_1 \cap D_2$ est un fermé de E.

Remarque :
On peut aussi utiliser le fait qu'un produit de compacts est un compact et qu'un ensemble compact est fermé.
Exemple : $E = [0;1] \times [2;5]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
En effet, comme $[0;1]$ et $[2;5]$ sont fermés dans $\mathbb{R}$ et bornés, ce sont donc des compacts de $\mathbb{R}$.
On en déduit que E est un compact de $\mathbb{R}^2$ donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Propriété

Des applications continues coïncidant sur des parties denses sont égales.

Démonstration

Conséquence des caractérisations séquentielles. □

Exercice : CCINP 35

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. **Soient f une application de E dans F et a un point de E.**
   On considère les propositions suivantes :

   P1. **f est continue en a.**

   P2. **Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$.**

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. **Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.**
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

---

1. Prouvons que $P1. \Longrightarrow P2.$.
   Supposons f continue en a.
   Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers a. Prouvons que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Par continuité de f en a, $\exists \, \alpha > 0 \, / \ \forall x \in E, \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \left\| f(x) - f(a) \right\| \leqslant \varepsilon$. (*)
   On fixe un tel α strictement positif.
   Par convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers a, $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - a\| \leqslant \alpha$.

On fixe un N convenable.
Alors, d'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
Prouvons que $P2. \Longrightarrow P1$.

Supposons $P2$. vraie.
Raisonnons par l'absurde en supposant que f non continue en a.
C'est-à-dire $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \alpha > 0, \exists x \in E$ tel que $||x - a|| \leqslant \alpha$ et $||f(x) - f(a)|| > \varepsilon$.
On fixe un tel ε strictement positif.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\alpha = \dfrac{1}{n}$, il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n - a|| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $||f(x_n) - f(a)|| > \varepsilon$. (*)
Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n - a|| \leqslant \dfrac{1}{n}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite converge vers a.
Donc, d'après l'hypothèse, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(a)$.
Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow ||f(x_n) - f(a)|| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, on obtient une contradiction avec (*).

2. Soit $x \in E$.
Puisque la partie A est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = g(x_n)$.
Et en passant à la limite, sachant que f et g sont continues sur E, on obtient $f(x) = g(x)$.

3 Uniforme continuité

Définition

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{F}$. On dit que f est **uniformément continue** sur A si
$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x, y \in A,$
$$\|x - y\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Remarque

À ne pas confondre avec f continue sur A :
$\forall a \in A, \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x \in A,$
$$\|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon.$$
Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Propriété

Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A. Réciproque fausse.

Démonstration

Si
$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall a, x \in A, \ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$$
alors
$$\forall a \in A, \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall x \in I, \ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon. \quad \square$$

Démonstration

($\Rightarrow$) Si f uniformément continue et $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon > 0$.
On a $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in I, \ \ \|x - y\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$ or on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \ \ x_n - y_n \leqslant \eta$, ainsi $\forall n \geqslant N, \ \ f(x_n) - f(y_n) \leqslant \varepsilon$ et donc $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

($\Leftarrow$) Par contraposée, si f n'est pas uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \ \ \exists x, y \in I, \ \ \|x - y\| \leqslant \eta$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\eta = \frac{1}{n+1}$, on a x_n, y_n des réels tels que $\|a_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$. Ainsi, $x_n - y_n \to 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. □

Propriété

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Remarque

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Exemple

$x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ mais pas $x \mapsto x^2$.

4 Fonctions lipschitziennes

Définition

$f : A \subset E \to F$ est dite k-lipschitzienne sur A (où $k \in \mathbb{R}_+^*$ si

$$\forall\, x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\,\|x - y\|_E\,.$$

Propriété

Toute fonction lipschitzienne sur A y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Démonstration

$\forall\, x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E$. Donc si $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ convient dans la définition de l'uniforme continuité. □

Exemple

$x \mapsto \|x\|$

Définition : distance à une partie

Si A est une partie non vide de E, $x \in E$, on appelle **distance de x à A** le réel $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ qui est bien défini.

Démonstration

$\{\|x - a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car A non vide) minorée par 0. □

Propriété

$\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}\right.$ *est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.*

C'est en particulier le cas de $x \mapsto d(x, a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

Démonstration

Déjà vu dans le chapitre espaces vectoriels normés. □

Exemple

On retrouve que les boules ouverte/fermée le sont, et que les sphères sont fermées.

5 Applications linéaires

Remarque

Pour une application linéaire, on peut toujours déplacer un problème en un point donné en un problème en 0_E, et la continuité revient à une lipschitziannité, et donc une uniformité continue.

Propriété : Continuité des applications linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est continue sur E.*

(ii) *u est continue en 0_E.*

(iii) **Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$,**

$$\|u(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E\,.$$

(iv) *u est lipschitzienne sur E.*

(v) *u est uniformément continue sur E.*

Démonstration

$(i \Longrightarrow ii)$ Immédiat.

$(ii \Longrightarrow iii)$ Si u est continue en 0_E, en écrivant la définition avec $\varepsilon = 1$, on a $\eta > 0$ tel que si $\|x\|_E \leqslant \eta$, $\|u(x)\|_F \leqslant 1$ (car $u(0_E) = 0_E$).

Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\|\lambda x\|_E \leqslant \eta$: il suffit de choisir $\lambda = \dfrac{\eta}{\|x\|_E}$, par exemple.

Alors $\|u(\lambda x)\|_F = |\lambda|\,\|u(x)\|_F \leqslant 1$ donc $\|u(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} = \dfrac{1}{\eta}\|x\|_E$.

Comme cette inégalité est également vérifiée en 0_E, $C = \dfrac{1}{\eta}$ convient.

$(iii \Longrightarrow iv)$ S'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$, alors pour tout $x, x' \in E$, $\left\|u(x) - u(x')\right\|_F = \left\|u(x - x')\right\|_F \leqslant C\left\|x - x'\right\|_E$ donc u est C-lipschitzienne.

$(iv \Longrightarrow v)$ Connu.

$(v \Longrightarrow i)$ Connu.

Définition

On note $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F) \cap \mathscr{C}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E.

Remarque

$\mathscr{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.

Exemples

E 1 – $\varphi : f \in (\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C}), N_\infty) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est continue. En effet, c'est une forme linéaire telle que pour tout f, $\varphi(f) \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty$.
Elle est aussi continue si on munit $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$ de la norme N_1 de la convergence en moyenne.

E 2 – $f \in (\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \mapsto f(0) \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est non continue avec f_n telle que $f_n(0) = 1$ mais $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n}$ (par exemple un triangle : $f_n(0)=1$, $f_n(x)=0$ si $x \geqslant \frac{2}{n}$ et f_n affine entre 0 et $\frac{2}{n}$) ou alors $f_n : x \mapsto (1-x)^n$).

Méthode : Étudier la continuité d'une application linéaire en dimension infinie

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$.)

Remarques

R 1 – La continuité dépend des normes au départ et à l'arrivée, mais ne change pas en prenant des normes équivalentes.

R 2 – La domination de norme est équivalente à la continuité de l'endomorphisme id_E pour ces normes : $\mathrm{id}_E : (E,N_1) \to (E,N_2)$ est continue ssi on a C tel que $\forall x \in E, \quad N_2(\mathrm{id}_E(x)) = N_2(x) \leqslant CN_1(x)$ si et seulement si N_1 domine N_2.

Exercice : CCINP 36

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. **Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :**

   P1. **f est continue sur E.**

   P2. **f est continue en 0_E.**

   P3. **$\exists k>0$ tel que : $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\|_F \leqslant k\|x\|_E$.**

2. **Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que φ est linéaire et continue.**

---

1. P1 $\Rightarrow$ P2 de manière évidente.
   Prouvons que P2 $\Rightarrow$ P3.

   Supposons f continue en 0_E.
   Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x - 0_E\| \leqslant \alpha \Rightarrow \left\|f(x) - f(0_E)\right\| \leqslant 1$.
   Soit $x \in E$

   Si $x \neq 0_E$, posons $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|}x$. Puisque $\left\|y\right\| = \alpha$, on a $\left\|f(y)\right\| \leqslant 1$.

   Donc, par linéarité de f on obtient $\left\|f(x)\right\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x\|$.
   Si $x = 0_E$ l'inégalité précédente est encore vérifiée.

   En prenant alors $k = \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient le résultat voulu.

   Prouvons que P3 $\Rightarrow$ P1.

   Supposons que $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\| \leqslant k\|x\|$.
   Comme f est linéaire, $\forall (x,y) \in E^2$, $\left\|f(y) - f(x)\right\| = \left\|f(y-x)\right\| \leqslant k\left\|y-x\right\|$.
   La fonction f est alors lipschitzienne, donc continue sur E.

2. L'application φ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale et continue car :
   $\forall f \in E$, $|\varphi(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left\|f\right\|\mathrm{d}t = \left\|f\right\|$.

IV Dimension finie

1 Coordonnées

Propriété

On suppose F de dimension finie $n > 1$.

Soit A une partie non vide de E, $f \in F^A$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. On pose $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.

Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est continue sur A.

Démonstration

Propriété analogue connue pour les limites. □

2 Applications linéaires

Théorème

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E vers F est continue sur E.
Autrement dit, $\mathscr{L}_c(E, F) = \mathscr{L}(E, F)$.

Remarque

La réciproque est vraie car une domination de norme est une continuité d'application linéaire (id_E).

Démonstration

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $x \in E$.

On décompose $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$. Alors $\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{k=1}^{p} x_k u(e_k) \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| \, \|u(e_k)\|_F \leqslant C N_1(x)$ où $C = \max \|u(e_k)\|$ ne dépend pas de x et N_1 norme sur E de dimension finie donc équivalente à $\|\cdot\|_E$: on a $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $N_1 \leqslant \alpha \|\|_E$ et alors $\|u(x)\|_F \leqslant \alpha C \|x\|_E$ donc u est bien continue. □

Exemple

Si $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PAP^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie.
Ainsi, si $A_k \to A$, alors $PA_kP^{-1} \to PAP^{-1}$.

3 Applications polynomiales

Définition

Soit $f : E \to \mathbb{K}$, où E est de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

f est dite **monomiale** s'il existe $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}^p$ tels que $f : x \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$.

f est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions monomiales.

Remarque

En changeant des base, les anciennes coordonnées sont transformées en combinaisons linéaires de nouvelles coordonnées. Ainsi, le caractère polynomial d'une fonction ne dépend pas de la base.

Propriété

Toute fonction polynomiale sur E de dimension finie est continue.

Démonstration

Les formes i^e coordonnées $\varphi_i : x \mapsto x_i$ sont linéaires donc continues, donc, par opérations, f l'est. □

Exemple

$\det$ est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car polynomial en les cœfficients de la matrice.
On en déduit par exemple que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert en tant que image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ par l'application continue $\det$.

4 Applications multilinéaires

Propriété : Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Si $(E,\|\|_E)$, $(F,\|\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(G,\|\cdot\|_G)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors toute application bilinéaire de $E\times F$ dans G est continue.

Démonstration

$B : E\times F \to G$ bilinéaire, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_q)$ une base de F.
Si $(x,y)\in E\times F$, $B(x,y) = B\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k, \sum_{\ell=1}^{q} y_\ell f_\ell\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} x_k y_\ell B(e_k, f_\ell)$.
Or $(x,y)\mapsto x_k$ est continue car $x\mapsto x_k$ l'est et $(x,y)\mapsto y_\ell$ est continue car $y\mapsto y_\ell$ donc par opérations B est continue. □

Propriété : Généralisation

Plus généralement, toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.

Démonstration

Démonstration similaire. □

Exemple

Si $\mathscr{B}$ base de E de dimension finie, $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire de E donc est continue.

V Compacité

1 Suites extraites

Définition : Suite extraite

Soit $u\in E^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v\in E^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n = u_{\varphi(n)}$.
φ est appelée **extractrice**.

Lemme

Si φ est une extractrice, alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \varphi(n)\geqslant n.$$

Propriété

Si $u\longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans E) de suite extraite de u.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Réciproque fausse.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Exercice

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. **Montrer qu'il y a équivalence entre**
   - **(i)** **ℓ est valeur d'adhérence de u.**
   - **(ii)** **Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est infini.**
   - **(iii)** **Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ n'est pas vide.**
2. **Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.**

1.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Si ℓ est valeur d'adhérence, φ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$, $\varepsilon > 0$, alors apcr $u_{\varphi(n)} \in B(\ell, \varepsilon)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Soit $\varepsilon > 0$, si $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est majoré et si $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ ne peut être vide, sinon l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ serait majoré par p et inclus dans $\mathbb{N}$ donc fini.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ n'est pas vide, on construit une suite extraite convergeant vers ℓ : on pose $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(0) \geqslant 0$ et $u_{\varphi(0)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^0}\right)$.

Puis $\varphi(1) \geqslant p = \varphi(0) + 1$ tel que $u_{\varphi(1)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^1}\right)$.

Et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant p = \varphi(n-1) + 1$ tel que $u_{\varphi(n)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^n}\right)$.

Alors φ est strictement croissante et, par construction, $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

2. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences de u. Montrons que ${}^cA$ est ouverte.
   Si $x \in {}^cA$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\{n, u_n \in B(x, \varepsilon)\}$ est fini et donc aucun des élément de $B(x, \varepsilon)$ ne peut être valeur d'adhérence non plus, c'est-à-dire que $B(x, \varepsilon) \subset {}^cA$, ce qui signifie bien que ${}^cA$ est ouverte et que A est fermée.

2 Parties compactes

a Définition

Définition : de Bolzano-Weierstrß

Une partie K de E est dite **compacte** (ou est **un compact**) lorsque toute suite d'éléments de K a au moins une valeur d'adhérence **dans** K, c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite qui converge dans K.

Remarques

R 1 – $\varnothing$ est compacte.

R 2 – Par théorème de Bolzano-Weierstraß, tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

b Un compact est fermé borné

Propriété

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration

Soit K une partie compacte de E.

Soit $u=(u_n)_n$ une suite d'éléments de K, convergeant vers $\ell \in E$. Comme K est compacte, on peut extraire de x une suite convergeant dans K. Par propriété des suites extraites et unicité de la limite, on a alors $\ell \in K$. Ainsi, K est fermée.

K est bornée sinon, on pourrait construire une suite $u \in K^n$ telle que $\|u\| \to +\infty$ (avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B(0_E, n)$, par exemple) et dont les suites extraites ne peuvent converger. □

Remarques

R 1 – La réciproque est fausse en général, mais on va voir qu'elle est vraie en dimension finie.

R 2 – Tout compact de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment.

Exemple

Dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |p_k|$ (avec des notations évidentes), $X^n \in S(0,1)$ (qui est fermée et bornée).

Si (X^n) a une valeur d'adhérence, on a $P \in \mathbb{K}[X]$ et φ extractrice telle que $\left\|X^{\varphi(n)} - P\right\|_\infty \to 0$. Alors chaque cœfficient de $X^{\varphi(n)}$ tend vers le cœfficient correspondant de P, donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Mais alors $1 = \left\|X^{\varphi(n)}\right\|_\infty \to 0$ ce qui est contradictoire.

Exercice : CCINP 13 (nouveau)

1. **Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.**
2. **Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.**
3. **Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.**
4. **On se place sur $E=\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.**
   (a) **Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] / \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.**
   (b) **Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E? Justifier.**

---

1. Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si de toute suite à valeurs dans A on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.
   C'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in A$.
   Remarque : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant strictement croissante, on a, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie compacte de E.
   Montrons que A est une partie fermée de E.
   C'est-à-dire montrons que toute suite à valeurs dans A qui converge, converge dans A.
   Soit (u_n) une suite à valeurs dans A telle que (u_n) converge vers ℓ. A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell' \in A$.
   Or, (x_n) converge vers ℓ donc $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, en tant que sous-suite de (x_n). Par unicité de la limite, $\ell' = \ell$.
   Or, $\ell' \in A$ donc $\ell \in A$.
3. Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.
   Rappel : Soit B une partie de E. B est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in B, \|x\| \leqslant M$.
   Soit A une partie compacte de E. Montrons que A est une partie bornée de E.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que A est non bornée.
C'est-à-dire, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A / \|x\| > M$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / \|x_n\| > n \quad (*)$
(x_n) est une suite à valeurs dans A et A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in A$.
Donc, d'après $(*), \forall n \in \mathbb{N}, \|x_{\varphi(n)}\| > \varphi(n)$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{\varphi(n)}\| > n$.
Donc, $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$.
Absurde car $(x_{\varphi(n)})$ converge donc $(x_{\varphi(n)})$ est bornée.

4. Posons $S = S(0,1)$.
   (a) $\forall x \in S, \|x\| = 1$ donc S est bornée.

   Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ $\forall (x,y) \in E^2, |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$ donc f est 1-lipschitzienne.
   Donc f est continue sur E.
   Or, $S = f^{-1}(1)$ et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc S est une partie fermée de E, en tant qu'image réciproque par une application continue d'un fermé.
   (b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   $\|X^n - X^m\|_1 = 2$
   Supposons que S soit une partie compacte.
   (X^n) est une partie compacte de E donc existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(X^{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in S$.
   Alors $\lim_{n\to+\infty} \left\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\right\|_1 = |\ell - \ell| = 0$ contredit $\left\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\right\|_1 = 2$.
   Donc S est non compact.

c Partie fermée d'un compact

Propriété

Soit K une partie compacte de E et A une partie de K. Si A est fermée, alors A est compacte.

Remarques

R 1 – La réciproque est vraie ! Ainsi les partie de K fermées sont exactement les parties de K compacte.

R 2 – Parle-t-on de fermé de E ou de fermés relatifs de K ? En fait, c'est la même chose car le compact K est fermé. Il n'y a donc pas d'ambiguïté.

R 3 – En dimension finie, ce ne sera pas très intéressant car on va montrer que les compacts en général sont exactement les fermés bornés.

Démonstration

En effet, si $A \subset K$ est fermée, toute suite d'éléments de A donc de K a une valeur d'adhérence dans K et comme A est fermée, cette limite de sous-suite est nécessairement dans A, donc A est compacte. □

d Produit de compacts

Propriété

Si $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p))$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et pour $i \in [\![1,p]\!]$, K_i compact de E_i, alors $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration

C'est évident si $p=1$, on montre le résultat pour $p=2$ et la démonstration se généralise pour p quelconque.
Si, donc, K_1 et K_2 sont des compacts de E_1 et E_2, $u=((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$.
Comme pour le théorème de Bolzano-Weierstraß, de $(x_n)\in K_1$ compact, on extrait $(x_{\varphi(n)})$ qui converge dans K_1, puis de $(y_{\varphi(n)})$ on extrait $(y_{\varphi(\psi(n))})$ convergeant dans K_2.
Alors $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ converge dans $K_1\times K_2$, ce qu'il fallait démontrer.
Pour $p>2$, il suffit de continuer le procédé avec chaque nouvelle composante. □

Remarque

La démonstration est intéressante, mais dans la pratique, en cas d'extractions multiples, il est légitime de se poser la question : peut-on faire apparaître un produit de compact ?

Exercice : CCINP 41

3 Fonctions continues sur des compacts

Propriété : Image continue d'un compact

Si $f:K\to F$ avec K partie compacte de E et f continue, alors $f(K)$ est compacte.

Remarques

R 1 – L'image continue d'un compact est compacte, et donc en particulier fermée et bornée.

R 2 – A ne pas confondre avec la propriété qui dit que l'image **réciproque** d'une partie relativement ouverte ou fermée de F l'est encore dans E.

Démonstration

Soit $y\in f(K)^{\mathbb{N}}$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in K$ tel que $y_n=f(x_n)$.
De $(x_n)\in K^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\ell\in K$.
Alors, par continuité, $y_{\varphi(n)}=f(x_{\varphi(n)})\to f(\ell)\in f(K)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire : théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un compact de E, à valeur réelles, est bornée et atteint ses bornes.

Remarque

Trèèèès utile ! Et avec un petit goût de déjà-vu...

Démonstration

$f:K\to\mathbb{R}$ continue et K compacte, alors $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc fermée et bornée.
Donc f est bornée et si $M=\sup f$, alors on a une suite $(y_n)\in f(K)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers M par caractérisation séquentielle du sup et comme $f(K)$ est fermée, $M\in f(K)$.
On montre de la même manière que l'inf est atteint. □

a Théorème de Heine

Théorème : de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

Démonstration

Comme dans le cas réel, on raisonne classiquement par l'absurde.
Soit $f : K \to F$ continue et non uniformément continue. Alors

$$\exists \varepsilon > 0,\quad \forall \eta > 0,\quad \exists \left(x, x'\right) \in K^2,\quad \left|x - x'\right| \leqslant \eta \text{ et } \left|f(x) - f(x')\right| > \varepsilon$$

Soit un tel $\varepsilon > 0$, avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta = \frac{1}{(\zeta(2))^n}$, on a $x_n, x'_n \in \mathbb{K}$ tel que $|x_n - x'_n| \leqslant \frac{1}{(\zeta(2))^n}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$.

Mais $((x_n, x'_n)) \in (K^2)^{\mathbb{N}}$ et K^2 est compacte donc on peut en extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}, x'_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers $(\ell, \ell') \in \mathbb{K}^2$.

Mais $x_n - x'_n \to 0$ donc $\ell = \ell'$ et par continuité $\varepsilon < \left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(x'_{\varphi(n)}\right)\right| \to 0$ ce qui est contradictoire. □

4 Cas de la dimension finie

a $\mathbb{K}$

On a déjà vu que les segments de $\mathbb{R}$ étaient des compacts de $\mathbb{R}$.
Le théorème de Bolzano Weierstrß permet de démontrer le résultat suivant, généralisé un peu plus loin.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß

De toutes suite bornée d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire

Les compacts du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}$.

Démonstration

Soit K un compact du corps $\mathbb{K}$. On a déjà vu que K était fermé et borné.
Soit K une partie fermée et bornée du corps $\mathbb{K}$. Soit $x \in K^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut en extraire une suite convergente. Mais comme K est fermée, la limite de la sous-suite est encore dans K qui est bien compact. □

Remarque

Les segments de $\mathbb{R}$ sont alors exactement les **intervalles** compacts de $\mathbb{R}$.
Mais il existe bien d'autre compacts qui ne sont pas des intervalles.
Par exemple, un ensemble fini est toujours compact (pourquoi ? – et c'est valable dans n'importe quel espace vectoriel normé).
Cependant, tout compact de $\mathbb{R}$ étant fermé et borné, il est inclus dans $[\inf K, \sup K] = [\min K, \max K]$ (le caractère fermé assurant le fait que les bornes soient atteintes).
Ainsi, les propriétés vraies « sur tout segment de $\mathbb{R}$ » sont aussi les propriétés vraies « sur tout compact de $\mathbb{R}$. »

b Équivalence des normes

Théorème

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Lemme

Les compacts de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ sont exactement les parties fermées et bornées de $(\mathbb{K}^n, \|\|_\infty)$.

Remarque

On généralise à tout espace vectoriel normé de dimension finie ci-après.

Démonstration : du lemme

On sait déjà que les compacts sont fermés et bornés.

Soit A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\|_\infty)$. Pour montrer qu'elle est compacte, il suffit de l'inclure dans un compact.

Or on a $M > 0$ tel que $x \in A \Longrightarrow \|x\|_\infty \leqslant M$. Alors, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \subset [-M, M]^n$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A \subset D(0, M)^n$ qui, dans les deux cas, est un produit fini de compacts donc un compact (et $\|\cdot\|_\infty$ est bien la norme produit de $|\cdot|$ n fois.) □

Démonstration : du théorème - Non exigible

Soit N une norme sur E espace vectoriel de dimension finie munie d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. On va montrer que N est équivalente à N_∞ définie par $N_\infty\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ ce qui suffit à conclure par transitivité.

Or, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \setminus \{0\}$, $\alpha N_\infty(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$ revient à avoir $\alpha \leqslant N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \leqslant \beta$, avec $\frac{x}{N_\infty(x)}$ de norme 1, donc dans la sphère unité. Il se trouve qu'il n'est pas difficile de montrer que la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ est compacte.

On introduit alors l'application $\phi : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ X = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \end{array} \right.$.

L'idée est de
- montrer que ϕ est continue,
- montrer que la sphère unité S de $\mathbb{K}^n$ est compacte pour $\|\cdot\|_\infty$,
- utiliser le fait que ϕ est bornée sur S,
- conclure.

Allons-y.

1. Montrons que ϕ est lipschitzienne. Si $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$\begin{aligned} \left|\phi(X) - \phi(Y)\right| = \left|\phi(x_1, \dots, x_n) - \phi(y_1, \dots, y_n)\right| &= \left|N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) - N\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right)\right| \\ &\leqslant N\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i\right) && \text{par inégalité triangulaire sur } |\cdot| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) N(e_i) && \text{par inégalité triangulaire sur } N \\ &\leqslant k \|X - Y\|_\infty \end{aligned}$$
où on a posé $k = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$.
ϕ est donc k-lipschitzienne, donc continue.
2. Soit $S = S(0, 1)$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ pour $\|\cdot\|_\infty$. C'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^n$, donc compacte d'après un résultat vu précédemment.
3. Comme ϕ est continue sur le compact S, elle atteint un minimum α et un maximum β sur S. Remarquons également que si $x \in S$, $x \neq 0$ et donc $\phi(x) \neq 0$ et $\alpha > 0$.
4. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \setminus \{0\}$, alors $\frac{1}{N_\infty(x)}(x_1, \dots, x_n) \in S$ donc $\alpha \leqslant N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \leqslant \beta$ puis $\alpha N_\infty(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$. Si $x = 0_E$, l'encadrement reste valable.
Ainsi, N est équivalente à N_∞. □

C Compacts en dimension finie

Théorème

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses parties fermées et bornées.

Démonstration

Soit $n = \dim E$.

Résultat déjà vu sur $\mathbb{K}^n$, que l'on transporte à E muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ via l'isomorphisme $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array} \right.$, qui est continu pour toute norme car on est en dimension finie et tel que si $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et $x=f(X)\in E$, $\|X\|_\infty = N_\infty(x)$: f « transporte la norme. »

Si A est une partie fermée bornée de E, $f^{-1}(A)$ est donc fermée par continuité et bornée car f transporte la norme. Donc c'est un compact de $\mathbb{K}^n$. Donc $A=f\left(f^{-1}(A)\right)$ (car f est bijective) est compacte comme image continue d'un compact. □

Corollaire

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration

Une suite bornée est dans une boule fermée qui est fermée et bornée donc compacte. □

Corollaire : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire : important !

Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Remarque

Exercice classique : tout sous-espace strict d'un espace vectoriel normé est d'intérieur vide.

Démonstration

E evn, F sev de dimension finie, $(u_n)\in F^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, convergeant vers $\ell\in E$.

Alors (u_n) est bornée dans F qui est de dimension finie, donc admet une suite extraite convergeant dans F d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Par unicité de la limite, $\ell\in F$ et F est fermé. □

Exercice : Trèèèèès classique

$\mathcal{O}(n)=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\right\}$ **est compact.**

On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.

Or $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M\mapsto M^\intercal M$ (bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|^2=\operatorname{tr}\left(M^\intercal M\right)$, on a $\mathcal{O}(n)\subset\overline{B}(0,\sqrt{n})$.

On a aussi avec une autre norme $N_\infty M = \max_{i,j}\left(\left|m_{i,j}\right|\right)\leqslant 1$.

Remarque

Le théorème de Riesz (HP) dit qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Exercice : Mines

Montrer que la boule unité fermée de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme N_∞ n'est pas compacte.

$f_n : x\in[0,1]\mapsto x^n$ est continue, de norme 1 et converge simplement vers $\delta_{\cdot,1}$. Si on pouvait en extraire une suite uniformément convergente, la limite devrait être continue.

5 Suites convergente dans un compact

Propriété

Soit K un compact. Une suite d'éléments de K est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration

Le sens direct est vrai sans hypothèse de compacité.

Pour le sens réciproque, on raisonne par contraposée. On suppose que $u \in K^{\mathbb{N}}$ ne converge pas. On sait qu'elle a au moins une valeur d'adhérence $\ell \in K$.

On a $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $\|u_n - \ell\| > \varepsilon_0$.

On a donc $\phi(0) \geqslant 0$ tel que $\left\|u_{\varphi(0)} - \ell\right\| > \varepsilon_0$, puis $\phi(1) \geqslant \varphi(0)+1$ tel que $\left\|u_{\varphi(1)} - \ell\right\| > \varepsilon_0$ et on construit ainsi par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|u_{\varphi(n)} - \ell\right\| > \varepsilon_0$.

Mais $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ étant à valeur dans le compact K, on peut en extraire une suite convergente. Sa limite, valeur d'adhérence de u ne peut valoir ℓ. □

Corollaire

***En dimension finie**, toute suite **bornée** converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration

Toute boule fermée est compacte. □

VI Connexité par arcs

1 Une relation d'équivalence

Définition : chemin continu

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Si $(a,b) \in A^2$, on appelle **chemin continu** joignant a à b dans A toute application $\phi : [0,1] \mapsto E$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- ϕ est continue
- $\forall\, t \in [0,1], \quad \phi(t) \in A$
- $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$

Propriété

La relation $\mathscr{R}$ sur A^2 « sont joints par un chemin continu » est une relation d'équivalence.

Démonstration

On vérifie facilement

Réflexivité : Prendre ϕ constante, qui est bien continue.

Symétrie : Si ϕ est un chemin continu joignant a à b, $1-\phi$ est un chemin continu joignant b à a.

Transitivité : Si ϕ joint a à b et ψ joint b à c, alors $\zeta : t \mapsto \begin{cases} \phi(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \psi(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ est un chemin continu joignant a à c.

□

2 Connexité par arcs

Définition : Composantes connexes par arcs

Soit A une partie de E. On appelle **composantes connexes par arcs** de A les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ définie précédemment.

Remarque

La composante connexe par arc de $a \in A$ est l'ensemble des $b \in A$ pouvant être joints à b par un chemin continu.

Propriété

Les composantes connexes par arcs de A partitionnent A.

Exemple

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 0\}$ possède quatre composantes connexes par arcs.

Définition : partie connexe par arcs

On dit que A est **connexe par arcs** lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs : A elle-même.

Propriété : convexe $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Démonstration

On choisit le segment comme chemin continu. □

Définition : Partie étoilée

A est dite étoilée s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout point b de A, le segment $[a,b]$ est inclus dans A.

Remarque

Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Propriété : étoilée $\Longrightarrow$ connexe par arc

Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

Démonstration

Si A est étoilée par rapport à a, $b, c \in A$, alors le chemin continu constitué des segments $[b,a]$ et $[a,c]$ joint b à c en restant dans A. □

3 Cas des parties de $\mathbb{R}$

Propriété

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration

Les intervalles étant convexes, ils sont connexes par arcs.
Si réciproquement, $A \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs, on montre que A est convexe, ce qui permet de conclure.
Si $x, y \in A$, on a $\phi : [0,1] \to A$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Si $z \in [x, y]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit l'existence de $t_0 \in [0,1]$ tel que $\phi(t_0) = z \in A$. $\square$

Remarque

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les convexes.
C'est faux en général, par exemple dans $\mathbb{R}^2$.

4 Image continue d'une partie connexe par arcs

Propriété

Si E, F sont des espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $f : A \to F$ une application continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Remarque

Pour les ouverts et les fermés, c'est l'image réciproque par une application continue qui est ouverte ou fermée.
Pour les compacts ou les connexes par arcs, c'est l'image directe par une application continue qui est compacte ou connexe par arcs.

Démonstration

Il suffit de composer les chemins continus par f. $\square$

Corollaire

Si f est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est un intervalle.
Autrement dit, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : s'il existe $a \in A$ tel que $\phi(a) = \alpha$ et $b \in A$ tel que $\phi(b) = \beta$, alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in A$ tel que $\phi(c) = \gamma$.

Remarque

Si pour résoudre une question on a envie d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, mais si on a une application (continue) qui n'est pas définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut penser à se demander si l'application ne serait pas, par hasard, définie sur une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé.