Réduction et polynômes

- Si on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres sont à chercher parmi les racines de celui-ci.
- Les valeurs propres sont **les** racines du polynôme caractéristique et aussi celles du polynôme minimal. Mais attention, pour un autre polynôme annulateur, ce sont seulement **des** racines.
- Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX = \lambda X$ où $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

  Pour utiliser les polynômes annulateurs, savoir exprimer simplement les blocs diagonaux d'un polynôme en une matrice diagonale ou triangulaire par blocs (c'est similaire au cas diagonal/triangulaire).
- Diagonalisabilité :
  - ⋆ Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - ⋆ On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - ⋆ Trouver un polynôme annulateur scindé simple est nécessaire et suffisant.
  - ⋆ Si on a une décomposition en sous-espaces stable, u est diagonalisable si et seulement s'il l'est sur chaque sous-espace.
  - ⋆ Lorsque A se présente par blocs, on peut aussi voir sur les blocs comment se traduit $P(A)$ pour un polynôme P.
  - ⋆ Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - ⋆ On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - ⋆ Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant ou sous-espaces stables par une matrice.
- Trigonalisabilité :
  - ⋆ Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - ⋆ Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
  - ⋆ Être trigonalisable, c'est être annulé par un polynôme scindé.
- Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux sont d'un usage fréquent (et ils vont souvent ensemble).

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Si $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, calculer les puissances de A, vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

2 Résoudre $y^{(4)} = y$ dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, en posant u l'opérateur de dérivation.

3 Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 **CCINP 65** **5** **CCINP 91** **6** **CCINP 88** **7** **CCINP 93**

2. Un grand classique

8 **Réduction simultaneé**

1. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables. Démontrer qu'il y a équivalence entre
   (i) u et v sont simultanément diagonalisables (c'est-à-dire diagonalisables dans une même base, soit encore il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v).
   (ii) u et v commutent.
   (iii) Chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
   Reformuler $(i) \iff (ii)$ en termes de matrices.
2. Dans cette question, le corps de base est $\mathbb{C}$. On suppose que u et v commutent, mais on ne les suppose plus diagonalisables. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.
   Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.
3. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales (on pourra commencer par une famille finie).

3. Polynômes annulateurs

9 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de M et I_3. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer sans calcul le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de M.
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 + A^\intercal = I_n$. Démontrer que A est diagonalisable.

11 **Oral CCINP** Soit E une $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$. Montrer que u est diagonalisable et décrire les sous-espaces de E stables par u.

12 Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, tr $A = 3$ et A est non inversible.

13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\Phi_A(M) = AM$. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

14 Sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f, g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m(\mathrm{e}_{-\lambda} f) = (D - \lambda\,\mathrm{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\mathrm{Ker}\,(D - \lambda\,\mathrm{id}_E)^m$.
4. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P.

15 **Oral Mines** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, A^k l'est pour tout $k \geqslant 2$.
Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice A inversible.

16 Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ayant pour polynôme minimal $X^2 + 1$?

17 **Oral CCINP** Soient $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = A^p$.

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

18 **Oral CCINP** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de u vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$, $\mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u$ puis que l'image et le noyau de u sont supplémentaires dans E.

19 **Oral CCINP** Soient $n \geqslant 2, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$$

où tr désigne la forme linéaire trace. Étudier la réduction de l'endomorphisme f et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

20 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est-elle diagonalisable ?

21 **Oral Centrale** Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}\,M = n$

22 Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^P = 0_n$.

1. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose $H = \{I_n + P(B),\ P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

4. Réduction par blocs

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

24 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si et seulement si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que N est diagonalisable et semblable à M.

25 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.