Espaces vectoriels normés, topologie

Exercices cherchés en cours

1 **CCINP 37** On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) ~~Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.~~
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Solution de 1 : CCINP 37

1. (a) Prouvons que N_∞ est une norme sur E.
   $\forall f \in E$, $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.
   Alors, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

   Si $\lambda = 0$ alors $N_\infty(\lambda f) = 0 = |\lambda| N_\infty(f)$.
   Si $\lambda \neq 0$:
   $\forall t \in [0,1]$, $|\lambda f(t)| = |\lambda||f(t)| \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$.
   Donc $N_\infty(\lambda f) \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$. (1)
   $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(t)| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.
   Donc $N_\infty(f) \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.
   C'est-à-dire, $|\lambda| N_\infty(f) \leqslant N_\infty(\lambda f)$. (2)
   Donc, d'après (1) et (2), $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$.
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall t \in [0,1]$,$|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   Donc $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   On en déduit que N_∞ est une norme.

   Prouvons que N_1 est une norme sur E.

   $\forall f \in E$, $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$.
   Or $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc $|f|$ est nulle.
   C'est-à-dire $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
   $$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| N_1(f).$$
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.

$\forall t \in [0,1]$, $|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)|$. Donc, par linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g) \leqslant N_1(f)+N_1(g)$.
On en déduit que N_1 est une norme sur E.

(b) $k=1$ convient car, $\forall\, f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)\mathrm{d}t = N_\infty(f)$.

(c) L'application identité de E, muni de la norme N_∞, vers E, muni de la norme N_1, est continue car linéaire et vérifiant $\forall\, f \in E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que :
un ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour $f_n(t) = t^n$, on a $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.
Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

2 **CCINP 38** On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \displaystyle\max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) ~~Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.~~

(c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Solution de 2 : CCINP 38

1. (a) On pose $E = \mathbb{R}[X]$.
Montrons que N_∞ est une norme sur E.
Par définition, $N_\infty(P) \geqslant 0$.

i) Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$ tel que $N_\infty(P) = 0$.
C'est-à-dire $\displaystyle\max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i| = 0$, donc, $\forall\, i \in [\![0,n]\!]$, $|a_i| = 0$.
On en déduit que $P = 0$.
ii) Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$N_\infty(\lambda P) = \displaystyle\max_{0\leqslant i\leqslant n} |\lambda|\,|a_i| = |\lambda| N_\infty(P)$.
iii) Soit $(P,Q) \in E^2$.
On considère un entier n tel que $n \geqslant \max(\deg P, \deg Q)$.
Alors, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$.

Ainsi, $P+Q=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)X^i$ et $N_\infty(P+Q)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i+b_i|$.
Or, $\forall\, i\in[\![0,n]\!]$, $|a_i+b_i|\leqslant|a_i|+|b_i|\leqslant N_\infty(P)+N_\infty(Q)$.
Donc, $N_\infty(P+Q)\leqslant N_\infty(P)+N_\infty(Q)$.
On en déduit que N_∞ est une norme.

(b) L'application identité de $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme N_1, vers $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme N_∞, est continue car linéaire et vérifiant, $\forall P\in\mathbb{R}[X], N_\infty(P)\leqslant N_1(P)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit qu'un ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
On peut aussi raisonner, de façon plus élémentaire, par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

(c) Pour $P_n=1+X+X^2+\cdots+X^n$ on a $N_1(P_n)=n+1$ et $N_\infty(P_n)=1$.
Donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{N_1(P_n)}{N_\infty(P_n)}=+\infty$.
On en déduit que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, en particulier N'_1 et N'_∞.

3 **CCINP 41** Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

Solution de 3 : CCINP 41

1. Soit E et F deux espaces vectoriels normés.
Soit $f:E\longrightarrow F$ une application continue.
L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E.
Exemple : $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy=1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f:\begin{array}{ll}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow\mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto xy\end{array}$.
2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit $F\subset E$.
F est un fermé de E si et seulement si $\complement_E F$ est un ouvert de E.
Exemple : $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\geqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car $\complement_{\mathbb{R}^2}B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
En effet, $\complement_{\mathbb{R}^2}B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2<1\}=B_o(0,1)$ où $B_o(0,1)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
Puis, comme toute boule ouverte est un ouvert, on en déduit que $\complement_{\mathbb{R}^2}B$ est un ouvert.
3. Caractérisation séquentielle des fermés :
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

A est un fermé de E si et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors $x \in A$.
Exemple : $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geqslant 1\}$ est un fermé.

En effet, soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de C qui converge vers (x,y).
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n \geqslant 1$, donc, par passage à la limite, $xy \geqslant 1$ donc $(x,y) \in C$.

4. Une intersection de fermés d'un espace vectoriel normé E est un fermé de E.
   Exemple : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geqslant 1$ et $x \geqslant 0\}$.

   On pose $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geqslant 1\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 0\}$.
   D'après 3., D_1 est un fermé.
   D_2 est également un fermé.

   En effet, D_2 est l'image réciproque du fermé $[0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$.

   On en déduit que $D = D_1 \cap D_2$ est un fermé de E.

Remarque :
On peut aussi utiliser le fait qu'un produit de compacts est un compact et qu'un ensemble compact est fermé.
Exemple : $E = [0;1] \times [2;5]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
En effet, comme $[0;1]$ et $[2;5]$ sont fermés dans $\mathbb{R}$ et bornés, ce sont donc des compacts de $\mathbb{R}$.
On en déduit que E est un compact de $\mathbb{R}^2$ donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4 **CCINP 34** Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $x_n \to x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

Solution de 4 : CCINP 34

1. Soit A une partie non vide de E.
   $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a.
   $\forall\, r > 0$, $B_0(a,r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r.
   Soit $a \in A$.

   $a \in \bar{A} \iff \forall\, V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A \neq \varnothing$.
   Ou encore :
   $a \in \bar{A} \iff \forall\, r > 0,\ B_0(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

2. Soit $x \in \overline{A}$.
   Prouvons que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Par hypothèse, $\forall\, r > 0,\ B_0(a,r) \cap A \neq \varnothing$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_0(x, \dfrac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$.
   C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, x_n \in B_0(x, \dfrac{1}{n}) \cap A$.
   On fixe alors, pour tout entier naturel n non nul, un tel x_n.

Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans A et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n - x|| < \dfrac{1}{n}$.
C'est-à-dire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.
Soit $x \in E$. On suppose que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Prouvons que $x \in \bar{A}$.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $B_0(x,\varepsilon) \subset V$.
On fixe un tel ε strictement positif.
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ donc $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow ||x_n - x|| < \varepsilon$.
On fixe un tel entier N.
Donc, comme (x_n) est à valeurs dans A, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in B_0(x,\varepsilon) \cap A$.
Or $B_0(x,\varepsilon) \subset V$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in V \cap A$, c'est-à-dire $V \cap A \neq \varnothing$.
On peut en conclure que $x \in \bar{A}$.

3. $\bar{A} \subset E$ et $0_E \in \bar{A}$ car $0_E \in A$ et $A \subset \bar{A}$.
   Soit $(x,y) \in \left(\bar{A}\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   D'après 1., Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A convergeant respectivement vers x et y.
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$.
   Or A est un sous-espace vectoriel de E et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in A^2$, donc $x_n + \lambda y_n \in A$.
   On en déduit que la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers $x + \lambda y$.
   On a bien $x + \lambda y \in \bar{A}$.
4. On suppose que A partie non vide et convexe de E. Prouvons que $\overline{A}$ est convexe.
   Soit $(x,y) \in \left(\overline{A}\right)^2$. Soit $t \in [0,1]$.
   Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
   $x \in \overline{A}$, donc il existe une suite (x_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   $y \in \overline{A}$, donc il existe une suite (y_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = tx_n + (1-t)y_n$.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$, $y_n \in A$ et A est convexe, donc $z_n \in A$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$.
   Donc z est limite d'une suite à valeurs dans A, c'est-à-dire $z \in \overline{A}$.

$\boxed{5}$ **CCINP 44** Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Solution de 5 : CCINP 44

Soit E un espace vectoriel normé. On note A et B deux parties non vides de E.

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.
   (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Donc $x \in \overline{B}$.

2. D'après la question précédente,
$A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
$B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in B\}$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$, A_1 ou A_2 est de cardinal infini.
On peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Remarque :On peut aussi prouver que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$. Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. (a) D'après la question 1. ,
$A \cap B \subset A$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$.
$A \cap B \subset B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.
Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Autre méthode :
Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, alors par minimalité de $\overline{A \cap B}$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$.
$\overline{A \cap B} = \varnothing$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

6 CCINP 45 Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant td_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Solution de 6 : CCINP 45

1. (a) Soit A une partie d'un ensemble E.
$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

   (b) On suppose que A est une partie non vide et convexe de E. Prouvons que $\overline{A}$ est convexe.
Soit $(x, y) \in \left(\overline{A}\right)^2$. Soit $t \in [0, 1]$.
Prouvons que $z = tx + (1 - t)y \in \overline{A}$.

$x \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
$y \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = tx_n + (1-t)y_n$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$, $y_n \in A$ et A est convexe, donc $z_n \in A$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$.
Donc z est limite d'une suite à valeurs dans A, c'est-à-dire $z \in \overline{A}$.

2. (a) Soit A une partie non vide de E. Soit $x \in E$ tel que $d_A(x) = 0$.
Par définition de la borne inférieure, nous avons : $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, a \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|x - a_n\| < \frac{1}{n}$.
Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est à valeurs dans A et converge vers x, donc $x \in \overline{A}$.

(b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x,y) \in E^2, \forall t \in [0,1], d_A(tx+(1-t)y) \leqslant td_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
Soit $(x,y) \in (A)^2$. Soit $t \in [0,1]$.
Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in A$.
Par hypothèse, on a $d_A(z) \leqslant td_A(x) + (1-t)d_A(y)$. (1)
Or $x \in A$ et $y \in A$, donc $d_A(x) = d_A(y) = 0$ et donc, d'après (1), $d_A(z) = 0$.
Alors, d'après 2.(a), $z \in \overline{A}$. Or A est fermée, donc $\overline{A} = A$ et donc $z \in A$.

Normes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.
Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $\|P\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |P(a_k)|$.
Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que cela définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9 Soit l'espace vectoriel $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0,1], R),\ f(0) = 0\right\}$.
Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right|$.

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.
3. Démontrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

10 Montrer que tout parallélogramme non aplati centré à l'origine est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

11 Soit N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x + ty|$.

Montrer qu'il s'agit d'une norme et dessiner sa boule unité.

12 Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leqslant 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y.

13 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], R)$ et $\varphi \in E$ une fonction telle que pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi(x) > 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que N est dominée par N_∞.
3. Démontrer que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

14 Montrer que toute norme est 1-lipschitzienne.

15 **Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\alpha = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.
2. On veut en déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{K}^n$ $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}$.

   Commencer par la démontrer en supposant $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p} = 1$ et $\|y\|_q = \sqrt[q]{\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^q} = 1$, puis, dans le cas général, en normalisant les vecteurs (c'est-à-dire en les divisant par $\|x\|_p$ et $\|y\|_q$, respectivement (Attention : on ne sait pas encore que ce sont des normes) lorsque c'est possible.)

   Quelle inégalité classique retrouve-t-on en particulier ?
3. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k|\,|x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k|\,|x_k + y_k|^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}$.
4. Montrer que $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \to +\infty$.

Remarque : On peut faire le même travail et obtenir des résultats similaires avec des intégrales de fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

Solution de 15 : Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

1. Concavité de $\ln$.
2. Appliquer la première question à $\dfrac{|x_k|}{\alpha}$ et $\dfrac{|y_k|}{\beta}$ et sommer, puis remplacer α et β.
3. Utiliser deux fois la question précédente dans l'indication.
4. Seule l'IT est difficile mais c'est la question précédente.
5. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p} \|x\|_\infty$.

16 Retrouver le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire d'une norme euclidienne (inégalité de Minkowski). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne.

Topologie

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Vrai ou faux

1. Un voisinage d'un point est toujours borné.
2. Une partie qui n'est pas ouverte est fermée.
3. Une intersection d'ouverts est ouverte.
4. L'adhérence d'une partie est toujours fermée.
5. Si un fermé contient une partie, il contient son adhérence.
6. Si une partie A est fermée, toute suite d'élément de A converge dans A.
7. Un point n'est pas intérieur à A si et seulement s'il est adhérent au complémentaire de A.

Ouverts, fermés

17 $\mathbb{Z}$ est-elle une partie ouverte de $\mathbb{R}$? une partie fermée de $\mathbb{R}$?

18 Soit E un espace vectoriel normé, F, G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, p, q les projections associées à la somme directe $F \oplus G$ et A une partie de E.

Montrer que si A est ouverte, $p(A)$ est un ouvert (relatif) de F et $q(A)$ est un ouvert de G.

En est-il de même pour une partie fermée ?

19

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont
$$|\xi| \leqslant \max\{1, |a| + |b| + |c|\}.$$
On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ soit scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$

Solution de 19 :

(a) Si ξ est racine de P alors

$$\xi^3 = -a\xi^2 - b\xi - c$$

Cas : $|\xi| \leqslant 1$. L'inégalité voulue est vérifiée. Cas : $|\xi| > 1$. On vérifie $1 \leqslant |\xi|^2$ et $|\xi| \leqslant |\xi|^2$. On a alors

$$\begin{aligned} |\xi|^3 = \left|a\xi^2 + b\xi + c\right| &\leqslant |a||\xi|^2|b||\xi| + |c| \\ &\leqslant |a||\xi|^2 + |b||\xi|^2 + |c||\xi|^2. \end{aligned}$$

En simplifiant par $|\xi|^2$,

$$|\xi| \leqslant |a| + |b| + |c|$$

et l'inégalité voulue est à nouveau vérifiée.

(b) Soit $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\mathscr{D}$ et notons (a, b, c) sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons x_n, y_n et z_n les trois racines réelles du polynôme $P_n = X^3 + a_nX^2 + b_nX + c_n$ que l'on sait scindé sur $\mathbb{R}$.

La suite $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente et la suite $(x_n, y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est donc aussi en vertu du résultat de la première question. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)}, z_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Notons (x, y, z) la limite de celle-ci. Par les relations coefficients/racines d'un polynôme scindé, on sait

$$\begin{cases} a_n = -\left(x_n + y_n + z_n\right) \\ b_n = x_ny_n + y_nz_n + z_nx_n \\ c_n = -x_ny_nz_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cela vaut en particulier pour $n = \varphi(k)$ et en faisant alors tendre k vers l'infini, il vient

$$\begin{cases} a = -(x + y + z) \\ b = xy + yz + zx \\ c = -xyz \end{cases}$$

Par ce système, on peut affirmer que les réels x, y et z sont les trois racines du polynôme X^3+aX^2+bX+c qui est donc scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $(a, b, c) \in \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est donc une partie fermée car contient les limites de ses suites convergentes.

20 Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les normes $N_1(P) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |P(t)|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{t\in[1;2]} |P(t)|$.

L'ensemble $\Omega = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$ est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

On pourra penser au théorème de Weierstraß.

Solution de 20 :

Posons $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P) = P(0)$.

Le cas de N_1 se traite facilement avec les résultats sur les fonctions continues : l'application φ est linéaire et puisque $|\varphi(P)| \leqslant N_1(P)$, cette application est continue. On en déduit que $\Omega = \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}^*\right)$ est un ouvert relatif à E c'est-à-dire un ouvert de E pour la norme N_1.

Mais nous n'avons pas encore vu ces résultats. On peut montrer directement que Ω est ouvert pour N_1 directement : si $P \in \Omega$, on vérifie que $B_{N_1}(P, |P(0)|) \subset \Omega$ car si Q appartient à cette boule, $|P(0) - Q(0)| < |P(0)|$ donc $|Q(0)| > 0$.

Ou alors on montre que $\complement\Omega = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$ est fermé car si $(P_n)_n$ est une suite d'éléments de E convergeant vers Q au sens de N_1 (donc uniformément sur $[0,1]$), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 0$ donc $Q(0) = 0$ (la convergence uniforme implique la convergence simple) soit $Q \in \complement\Omega$.

Pour la norme N_2, montrons que la partie Ω n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point $P = 1$. Pour cela considérons la fonction continue $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et 1 sinon.

Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant

$$\sup_{t \in [0;2]} |P_n(t) - f(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et en particulier

$$P_n(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad N_2\left(P_n - P\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Considérons alors la suite de polynômes (Q_n) avec

$$Q_n = P_n - P_n(0).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_n(0) = 0$ donc $Q_n \notin \Omega$ et

$$N_2\left(Q_n\right) \leqslant N_2\left(P_n - P\right) + |P_n(0)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$Q_n \underset{n \to +\infty}{\overset{N_2}{\longrightarrow}} P.$$

Puisque la partie Ω n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme N_2.

21 On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{$suites croissantes$\}$
$B = \{$suites convergeant vers 0$\}$
$C = \{$suites convergentes$\}$
$D = \{$suites admettant 0 pour valeur d'adhérence$\}$
$E = \{$suites périodiques$\}$
$F = \{$suites terme général d'une série absolument convergente$\}$.

Solution de 21 :

A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}, u_n^p \leqslant u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc $u \in A$.

B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n^p| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leqslant |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $u \to 0$ et donc $u \in B$.

C est fermé. En effet, si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leqslant \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p \cdot v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.

D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leqslant \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leqslant |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.

E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\delta^k$$

qui est élément de E. La suite u^p converge car

$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^p} \to 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de F et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de F, la partie F n'est pas fermée.

22 On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées.
2. $\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ étant normé par $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Solution de 22 :

(a) Les eléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sont bornés donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.

(b) Si $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est ouvert alors puisque $0 \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ il existe $\alpha > 0$ tel que $B_\infty(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Or la suite constante égale à $\alpha/2$ appartient à $B_\infty(0, \alpha)$ et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc $B_\infty(0, \alpha) \not\subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas ouvert.

(c) Pour $N \in \mathbb{N}$, posons u^N définie par $u_n^N = \frac{1}{n+1}$ si $n \leqslant N$ et $u_n^N = 0$ sinon.

$(u^N) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $u^N \to u$ avec u donné par $u_n = \frac{1}{n+1}$. En effet,

$$\left\|u^N - u\right\|_\infty = \frac{1}{N+2} \to 0.$$

Mais $u \notin \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé

Adhérence, intérieur

23 Montrer que ${}^c\mathring{A} = \overline{{}^cA}$ et ${}^c\overline{A} = \widehat{{}^cA}^{\circ}$

24 Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup A$ est l'unique majorant de A adhérent à A.

25 Si A et B sont deux parties de E, montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et donner des contre-exemples pour les inclusions réciproques.

26 Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

27 Soit F sous-espace vectoriel normé de E. Montrer que soit $F = E$ soit $\mathring{F} = \varnothing$.

28 Soit A une partie de E. Comparer par inclusion les parties A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$. Peut-on créer d'autres combinaison ?

Calculer tous ces ensembles pour $A = 0 \cup [1,2[\cup]2,3] \cup (\mathbb{Q} \cap [4,5])$.

29 **Frontière**

1. Comparer $\operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr} {}^cA$.
2. Montrer que $\operatorname{Fr} A \cup B \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr} \mathring{A} \subset \operatorname{Fr} A$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?

Densité

30

1. Montrer que $\left\{\dfrac{k}{2^n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$ est dense dans $[0,1]$.
2. Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.

(On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y) = \Big\{ t \in [0,1] \mid f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \Big\}$$

contient tous les $\dfrac{k}{2^n}$*...)*

Solution de 30 :

Indication :

Montrer l'indication par récurrence puis utiliser un argument de densité.

Corrigé :

Il n'y a qu'un sens intéressant.

Méthode 1 On voit assez facilement que si on itère l'application de

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$$

on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+y\right)\right) &\leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+f(y)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)+f(y)\right) \end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$f\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right) \leqslant \frac{1}{4}f(x) + \frac{3}{4}f(y)$$

d'où l'idée de démontrer, par récurrence sur n :

$$\forall n \geqslant 0\ \forall k \in [\![0, 2^n]\!]\ \forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{k}{2^n}x + (1-\frac{k}{2^n})y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + (1-\frac{k}{2^n})f(y)$$

La récurrence n'est pas difficile à établir : il suffit de dire que, si k et k' sont dans $[\![0, 2^n]\!]$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{2^n}x + (1-\frac{k}{2^n})y\right) + \left(\frac{k'}{2^n}x + (1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^n}x + (1-\frac{k}{2^n})y\right) + f\left(\frac{k'}{2^n}x + (1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)$$

on simplifie, on utilise la propriété à l'étape n, on en déduit la propriété à l'étape $n+1$.

Pour conclure, on utilise alors la continuité de f et la densité de l'ensemble $\left\{\dfrac{k}{2^n}\ ;\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n\right\}$ dans $[0,1]$ (qui se démontre comme dans l'exercice de topologie sur les sous-groupes additifs de **R**).

Méthode 2 (Beaucoup plus graphique, mais demande des notions de topologie). On raisonne par l'absurde, en supposant que f ne soit pas convexe. On fixe alors $x < y$ dans I et $t_0 \in]0,1[$ tels que

$$f\left(t_0 x + (1-t_0)y\right) > t_0 f(x) + (1-t_0)f(y)$$

Par continuité de f,

$$A = \{u \in [0,t_0]\ ;\ f\left(ux + (1-u)y\right) = uf(x) + (1-u)f(y)$$

est un fermé relatif de $[0,t_0]$ (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc un fermé (un fermé relatif A d'un fermé F est l'intersection avec ce fermé F d'un fermé G, donc est fermé). Non vide car il contient 0. Il a donc un plus grand élément (il est non vide majoré, il a donc une borne supérieure, qu'il contient car il est fermé). On appelle t_1 cet élément, et on note $x_1 = t_1x + (1-t_1)y$ (évidemment, on ne fait que décrire ce qu'on voit sur un dessin : x_1 est l'abscisse du dernier point avant $t_0x + (1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ rencontre la courbe).

De même,

$$B = \{u \in [t_0, 1] \ ; \ f(ux + (1-u)y) = uf(x) + (1-u)f(y)$$

a un plus petit élément t_2, et on note $x_2 = t_2x + (1-t_2)y$ (x_2 est l'abscisse du premier point après $t_0x + (1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ rencontre la courbe).

Sur $]t_1, t_2[$, l'application continue

$$u \mapsto f(ux + (1-u)y) - uf(x) - (1-u)f(y)$$

ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant strict d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc est strictement positif (c'est son signe en t_0). En particulier en $(t_1+t_2)/2$, ce qui donne finalement

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

31 Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de 31 :

Déjà vu : perturber les cœfficient diagonaux de J_r dans l'écriture $A = PJ_rQ$ ou bien remarquer que pour k suffisamment grand, $A - \frac{1}{k}I_n$ est inversible.

32 Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ dont soit denses, soit discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$ pour $a \in \mathbb{R}$.) Applications :

1. Soit b un entier au moins égal à 2. Montrer que $\left\{\dfrac{a}{b^k}, \ (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.
   Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer qu'entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.

Solution de 32 :

Déjà vu : introduire $\alpha =\in G \cap \mathbb{R}_*^+$ lorsqu'il existe et séparer les cas où $\alpha = 0$ (dense, semblable à la densité de $\mathbb{Q}$) ou $\alpha > 0$ (discret, avec une presque division euclidienne, semblable aux sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ ou aux idéaux de $(\mathbb{K}[X], +)$).

Applications :

1. **Densité de $\left\{\frac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}\right\}$:**

   Soit b un entier au moins égal à 2. On note $G = \left\{\dfrac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}\right\}$. On a bien sûr $G \neq \varnothing$ et $G \neq \{0\}$.

   De plus, si x et y sont des éléments de G, on a $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{b^k}$ et $y = \frac{a'}{b^{k'}}$.

   Mais alors $x - y = \frac{ab^{k'} - a'b^k}{b^{k+k'}}$ avec $ab^{k'} - a'b^k \in \mathbb{Z}$ et $k + k' \in \mathbb{N}$, donc $x - y \in G$.

   De plus, comme 0 minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{b^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ (car $b > 1$) avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b^k} \in G$,

$$\alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0.$$

C'est donc que $\boxed{\left\{\frac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

Remarque : cette densité se retrouve directement en remarquant que la suite de terme général $x_n = \frac{\lfloor b^n x \rfloor}{b^n}$ élément de G converge vers $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. **CNS pour que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$** :
Soit $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. On vérifie sans mal que G n'est ni vide, ni réduit à 0 et que la différence de deux éléments de G est encore dans G.
Remarquons que dire que

$$\text{« } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \text{ »}$$

c'est dire que

$$\text{« } a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est n'est pas dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}. \text{ »}$$

- Si $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors, d'après ce qui précède, $G = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$.
Donc, comme $a \in G$ et $b \in G$, on a deux entiers k et k' (non nuls car a et b sont non nuls) tels que $a = \alpha k$ et $b = \alpha k'$.
Alors $\frac{a}{b} = \frac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$.
- Réciproquement, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, soient n et m deux entiers tels que $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$.
Pour tout $x \in G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, on a $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = ap + bq$. Mais alors

$$x = b\frac{n}{m}p + bq = \frac{b}{m}(np + mq) \in \frac{b}{m}\mathbb{Z}.$$

Ainsi, $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset \frac{b}{m}\mathbb{Z}$. Mais alors G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car on ne peut pas, par exemple, trouver d'élément de G entre $\frac{b}{3m}$ et $\frac{b}{2m}$.
(On peut aussi voir que $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) \geqslant \frac{b}{m} > 0$.)
(Remarque : le théorème de Bézout permet de dire que si la fraction $\frac{n}{m}$ est irréductible, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{b}{m}\mathbb{Z}\left(= \frac{a}{n}\mathbb{Z}\right)$.)

Conclusion : $\boxed{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}.}$

3. **Autre application** :
D'après la question précédente, comme $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Donc entre } \pi \text{ et } \pi + 10^{-9}, \text{ il y a un réel de la forme } p + q\sqrt{2} \text{ où } p, q \in \mathbb{Z}.}$

33 Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est soit fermé, soit dense.

Solution de 33 :

Supposons H hyperplan non fermé. On a alors une suite $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x \notin H$. Mais comme H est un hyperplan, $H \oplus \mathbb{K}x = E$.

Soit $y \in E$. Il s'écrit $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Mais alors $(h + \lambda x_n)_n$ est une suite d'éléments de H qui converge vers y donc H est dense dans E.

Remarque : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé comme noyau d'une forme linéaire, qui est automatiquement continue.