Probabilités

- Bien connaître la définition d'une probabilité, en particulier la σ-additivité. Aucun développement théorique n'est attendu concernant la notion de tribu, mais la définition est au programme. Lorsque l'univers est fini ou dénombrable, on peut choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on définit une unique probabilité avec les probabilités des événements élémentaires, positives, sommables, de somme 1.
- Être négligeable ne signifie pas être vide. Être presque sûr ne signifie pas être égal à Ω.
  Pour montrer une propriété presque sûre, on peut penser à utiliser la continuité monotone.
  Notons que dans la définition d'un système complet d'événements, il faut que la réunion soit égale à Ω et pas seulement presque sûre.
- ⚠ Il n'y a toujours pas d'« événement conditionnel $A|B$ » (élément de $\mathcal{A}$) : $\mathbb{P}(A|B)$ n'est qu'une notation signifiant qu'on se place en observateur de l'événement A sachant que l'événement B est déjà réalisé. Mais la notation $\mathbb{P}_B$ peut aussi être trompeuse, car c'est la même que celle de la loi d'une variable aléatoire.
- L'emploi de la formule des probabilités composée correspond à une vision chronologique de la réalisation des événements : on réalise A_1, puis A_2 sachant que A_1 l'est, puis A_3 sachant que A_1 et A_2 le sont, etc.
- La formule des probabilités totales est utile lorsque l'on fait une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction de cas, suivant le résultat de la première étape.
  ⚠ ne pas confondre $\mathbb{P}(B \cap A_i)$ et $\mathbb{P}(B \mid A_i)$!
- La formule permet de remonter le temps, appelée aussi formule de probabilité des causes.
- ⚠ Ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général. En effet, si A et B sont incompatibles, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, ils ne sont pas indépendants. (Ce qui se comprend car $A \subset \overline{B}$ par exemple).
  Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste : elle dépend de la probabilité dont est muni Ω.
  Il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants.
- Quant à l'indépendance mutuelle, c'est une hypothèse très contraignante (la probabilité de l'intersection de toute sous-famille finie est égale au produit des probabilités) qui provient souvent d'une modélisation dans laquelle on se donne une probabilité pour que ce soit le cas. Elle est stable par passage au complémentaire de certains événements (valable aussi pour l'indépendance 2 à 2) et on peut prendre des réunions ou des intersections finies en conservant l'indépendance (non valable pour l'indépendance 2 à 2).

Exercices vus en cours

1 **Le problème des clés** Au lycée Carnot, il y a beaucoup de serrures différentes, on vous a prêté un trousseau de n clefs pour ouvrir une porte, et vous avez oublié de demander laquelle était la bonne.
De plus, elles se ressemblent suffisamment pour qu'il soit impossible de deviner à vue laquelle est la plus plausible.
Vous les essayez donc l'une après l'autre.
Quelle est la probabilité pour que ce soit la k^e clé testée qui vous ouvre la porte ($1 \leqslant k \leqslant n$) ?

2 Dans une urne se trouvent $n-1$ boules blanches, 1 boule rouge. On tire, sans remise, boule après boule. Quelle est la probabilité pour que la boule rouge sorte de l'urne au k^e tirage ?

3 **CCINP 101** **4** **CCINP 107** **5** **CCINP 105**

6 Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.
On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsqu'elle est effectivement présente.
Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0{,}1$ % des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

7 **Le problème de Monty Hall** Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

8 On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».
Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$.

9 **Indicatrice d'Euler** Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k \in \Omega \text{ et } kd \in \Omega\}$.

1. Quelle est la probabilité de A_d ?
2. Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n.
   (a) Démontrer que $(A_p)_{p \in P}$ est une famille d'événements indépendants.
   (b) En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).

10 Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$,

Dénombrements

11 Combien peut-on construire de nombres comportant 6 chiffres (en base décimale) et ne contenant aucune répétition ? une seule répétition ?

12 Combien y a-t-il de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$?

13 Soit E un ensemble fini à n éléments, A une partie de E à p éléments. Combien peut-on trouver de parties de E ayant exactement un élément de A ?

14 Montrer que dans un ensemble fini non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

15 **CCINP 112**

16 **Partitions d'un entier**

1. Déterminer le nombre a_n d'écritures possibles de n comme somme d'au moins un entier naturels non nuls (l'ordre étant important).
2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre N_n^p d'écritures de n comme somme de p entiers naturels.

On pourra essayer de placer des « | » parmi n « ∘ » et interpréter cela comme des mots sur un alphabet à deux lettres, ou bien trouver une formule de récurrence.

17 Formule du crible

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

On peut raisonner par récurrence sur n, ou, plus simplement, s'intéresser à $\prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$ sur $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et la développer.

Probabilités

18

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n$.

19

Sur l'univers $\mathbb{N}^*$, muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ unique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$.

20 Poker

Dans un jeu de 52 cartes classiques, on distribue des mains de 5 cartes. Calculer les probabilités des événements :

- QFR : « Avoir une quinte flush royale » (quinte à l'as et couleur),
- QF : « Avoir une quinte flush non royale » (quinte non royale et couleur),
- A_4 : « Avoir un carré » (les 4 cartes de même valeur),
- F : « Avoir un full » (un brelan et une paire),
- C : « Avoir une couleur qui ne soit pas une quinte » (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas),
- Q : « Avoir une quinte non flush » (5 cartes qui se suivent, pas toutes de la même couleur),
- A_3 : « Avoir un brelan » (exactement 3 cartes de même valeur),
- PP : « Avoir une double paire » (2 paires ne formant pas un carré),
- A_2 : « Avoir une paire » (exactement 2 cartes de même valeur),
- R : « Rien de tout ça ! ».

On devra trouver :

Événement	QFR	QF	A_4	F	C	Q	A_3	PP	A_2	R
Probabilité (%) $\approx$	0,00015	0,0014	0,024	0,14	0,20	0,40	2,1	4,8	42	50

21 Distance la plus probable

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour d compris entre 1 et $n-1$, calculer la probabilité que deux amis soient distants de d places (c'est-à-dire séparés par $d-1$ personnes.) Quelle est la distance la plus probable ?

Même question s'ils sont placés sur un cercle.

22

Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2,..., N_k de couleur c_k (on a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$). On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_i boules de couleur c_i pour chaque i (donc $n_1 + \cdots + n_k = n$).

Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise et comparer les résultats.

23 Problème des anniversaires et des coïncidences

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons avec remise. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité que deux personnes soient nées le même jour (en supposant que personne n'est né le 29 février...) ?

   Application numérique pour $n \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$. À partir de quelle valeur de n cet événement est-il plus probable que son contraire ?

24

Deux joueurs s'affrontent au tir à l'arc, le premier qui touche la cible a gagné. Le premier joueur a une probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible, le second une probabilité $p_2 > 0$. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier tireur gagne puis celle que le second gagne.
2. En déduire qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Retrouver le résultat en utilisant une continuité monotone de la probabilité, en introduisant l'événement A_n : « Le jeu ne s'est pas arrêté au bout de $2n$ parties. »
4. On suppose que $p_2 = \dfrac{3}{2} p_1$. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

25 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i^{e} tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement « il n'y a aucune rencontre » et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i^{e} tirage ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Démontrer, en utilisant librement la formule de Poincaré (crible) que $\mathbb{P}(E) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Applications :

- *Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?*
- *Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?*
- *Les étudiants de MP 1 décident de se faire des cadeaux pour Noël. Ils mettent tous un papier portant leur nom dans la poubelle de la salle 210 puis tirent successivement un papier chacun portant le nom de personne à qui ils doivent faire un cadeau. Quelle est la probabilité que personne ne doivent se faire soi-même un cadeau ?*
- *Dans un club de Bridge, n messieurs laissent leurs n cannes (toutes distinctes) au vestiaire. En repartant, ils reprennent au hasard une canne. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne reprenne sa propre canne ?*
- *Quelle est la proportion de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe (on parle de **dérangement**) ?*

Probabilités conditionnelles

26 Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec une probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0<p<1$.

Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres.

On notre x_0 le bit initial. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n le bit après la traversée de n canaux, et p_n la probabilité que $x_n = x_0$.

1. Déterminer une relation entre p_{n-1} et p_n pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_n$.

27 Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches.

On tire deux par deux sans remise toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

28 Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que

- 2 % des personnes contrôlées sont en été d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété ;

1. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est positif.
   Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. Même question si le résultat est négatif.
3. Quel est la probabilité que le résultat soit faux ?

29 **Urne de Pólya**

Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches.

On effectue des tirages susccessifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c>0$ boules de la même couleur.

Pour $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n^{e} boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. On note $p_n(r,b)$ le probabilité d'obtenir une boule rouge au n^{e} tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que
$$\forall\, n \geqslant 2,\quad p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c)$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.
4. Démontrer en utilisant la même méthode que pour $1 \leqslant m < n$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
   On pourra noter $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m^{e} et n^{e} tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
5. En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

30 Trois joueurs A, B, C s'affrontent à un jeu aléatoire suivant les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité,
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties de suite.

1. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Indépendance

31 **Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$.

Posons $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $B = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\mathbb{P}(B)$.
2. Démontrer que les séries $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont de même nature.
3. En déduire que $\mathbb{P}(B) < 1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
4. Soit $I = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que $\mathbb{P}(I) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B) < 1$, et que $\mathbb{P}(I)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

32 **Loi Zeta** Soit $s \in]1,+\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'événement « n est multiple de m ». Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.
5. **Application de cette formule**
   On se propose en application de prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
   Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s>1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
   Conclure.