Devoir en Temps Limité n° 7

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- **L'exercice de probabilité est COMMUN.**
  Il est INDISPENSABLE d'en traiter au moins une partie : les copies faisant l'impasse dessus seront pénalisées.
  Puis deux problèmes au choix : type CCINP ou (exclusif) type CENTRALE/MINES.
  Inutile de traiter des questions dans les deux problèmes, vous n'aurez pas les points.

Exercice commun : Faire le bon pari

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D_1 et D_2.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D_1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D_2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- nous commençons par jeter la pièce,
- si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D_1, sinon nous choisissons le dé D_2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- ensuite, nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les événements suivants :

- D_1 est l'événement « nous jouons avec le dé D_1 » ;
- D_2 est l'événement « nous jouons avec le dé D_2 » ;
- pour tout entier naturel n, R_n l'événement « nous avons obtenu une face rouge au n^{e} lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $\mathbb{P}(D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2)$? Montrer que $\{D_1, D_2\}$ constitue un système complet d'événements.
2. Soit n non nul, quelles sont les valeurs de $\mathbb{P}(R_n \mid D_1)$ et $\mathbb{P}(R_n \mid D_2)$?
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
4. Établir un lien entre les probabilités $\mathbb{P}(R_1 \mid D_1)$, $\mathbb{P}(R_2 \mid D_1)$ et $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \mid D_1)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \dfrac{2^n+2}{3^{n+1}}$.
   En déduire pour tout n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(R_{n+1} \mid R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$.
6. Calculer $\mathbb{P}(D_1 \mid R_1 \cap R_2)$ puis, de manière générale, pour tout entier non nul n, montrer que
   $$\mathbb{P}(D_1 | R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{2^n}{2^n+2}.$$
7. Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D_1 ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?

Sujet CCINP

L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t$.
2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.
   On pourra utiliser librement que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème : Séries de Lambert

Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

A. Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a : \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

1. Soit $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.
   Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.
   Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1,1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.
3. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.
   Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Expression sous forme de série entière.
   On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right) \text{ où } I_n = \{(k,p)\in A, kp = n\}.$$
   Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.
   En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_d$.
   ($d|n$ signifiant d divise n).

B. Exemples

5. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.
6. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \varphi(n)$ où n est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n.
   Justifier que la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ est de rayon 1.
   On admet que pour $n \geqslant 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.
   Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.
7. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
8. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.
   En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question 3.
9. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.
   On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.

Problème Centrale/Mines

Dénombrements de certaines matrices binaires

Soit n un entier $\geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes. On appelle *matrice binaire* de taille n une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 . L'élément d'une telle matrice situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne est dit en position (i,j), où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
On désigne par $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de taille n comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et exactement deux 1 dans chaque colonne. L'exemple suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de $\mathcal{U}_4$.
On note u_n le cardinal de $\mathcal{U}_n$, et on pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

A. Questions préliminaires

1. Exhiber toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ pour $n = 2$ et 3, et déterminer les valeurs correspondantes de u_n. (Dans le cas $n = 3$, on pourra raisonner sur la position des éléments nuls dans chacune de ces matrices.)

Soit X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2. Si $A \in \mathcal{U}_n$, montrer que X_0 est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

Soit $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ comportant un 1 en position (1,1). On note h_n le cardinal de $\mathcal{H}_n$.

3. Calculer la somme de toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$ en fonction de h_n et de J.

B. Étude du cardinal de $\mathcal{U}_n$

4. Établir la relation $u_n = \frac{n}{2} h_n$ pour tout $n \geqslant 2$. (On pourra s'aider des deux questions précédentes.)

Soit $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ comportant un 1 en position $(1,2)$ et un 1 en position (2,1). On note k_n le cardinal de $\mathcal{K}_n$.

5. Pour tout $n \geqslant 2$, établir une relation donnant h_n en fonction de k_n et de $(n-1)^2$.
6. En examinant les possibilités pour le coefficient situé en position $(2,2)$, démontrer la relation $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 4$.

On pose $w_n = \frac{u_n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Déduire de ce qui précède une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Prouver que $w_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la série de terme général w_n diverge. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

   On pose $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.
9. Donner une équation différentielle vérifiée par W et en déduire une expression de $W(x)$ en fonction de x.

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

Cette partie permet d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$. Soit α un réel et β un réel > 0.
On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1,1[$ par la formule $\phi(x) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{(1-x)^\beta}$.
On note $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ la fonction Gamma définie pour tout réel $t > 0$; on rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$.

10. Montrer que $\phi(x)$ est la somme d'une série entière $\sum \phi_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.
11. Montrer que si $x \in]-1,1[$, on peut écrire $\frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où l'on exprimera les coefficients a_n en fonction de $n!, \Gamma(\beta)$ et $\Gamma(n+\beta)$.
12. En déduire que $\phi_n = \frac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où l'on a posé $\psi_n = \int_0^{\infty} u^{\beta-1} \mathrm{e}^{-u} (\alpha+u)^n\, \mathrm{d}u$.
13. On fixe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > |\alpha|$. A l'aide des variations de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n$ définie pour tout $u \geqslant -\alpha$, montrer que $\left| \int_0^a u^{\beta-1} \mathrm{e}^{-u} (\alpha+u)^n\, \mathrm{d}u \right|$ est négligeable devant $\int_a^{\infty} u^{\beta-1} \mathrm{e}^{-u} (\alpha+u)^n\, \mathrm{d}u$ quand $n \to +\infty$.
14. En déduire qu'il existe $a > |\alpha|$ tel que ψ_n soit équivalent à l'intégrale $\int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-u} (\alpha+u)^{n+\beta-1}\, \mathrm{d}u$ quand $n \to +\infty$.
15. En conclure que les suites ψ_n et $\mathrm{e}^{\alpha}\Gamma(n+\beta)$ sont équivalentes.

On revient sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

16. Établir un équivalent de ϕ_n, puis de u_n quand $n \to +\infty$.
    On prendra soin de simplifier l'équivalent trouvé de u_n en utilisant la formule de Stirling.

FIN DE L'ÉNONCÉ