Devoir en Temps Limité n° 7

Exercice commun : Faire le bon pari (Agro-Veto 2013)

1. D_1 est l'événement « Choisir le dé D_1 », c'est donc l'événement « Obtenir pile », on en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}.}$

   D_2 est l'événement « Choisir le dé D_2 », c'est donc l'événement « Obtenir face », on en déduit $\boxed{P(D_2) = \frac{2}{3}.}$

   On choisit un dé parmi le dé 1 et le dé 2 et on ne choisit qu'un seul dé : $D_1 \sqcup D_2 = \Omega$. On en déduit que $\boxed{(D_1, D_2) \text{ est un système complet d'événements.}}$

2. Si D_1 a eu lieu, on utilise un dé avec 6 faces dont 4 rouges, on en déduit $\boxed{\mathbb{P}(R_n|D_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.}$

   Si D_2 a eu lieu, on utilise un dé avec 6 faces dont 2 rouges, on en déduit $\boxed{\mathbb{P}(R_n|D_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.}$

3. (D_1, D_2) étant un système complet d'événement et $\mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(D_2) \neq 0$, on peut affirmer, d'après la formule des probabilités totales que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1) &= \mathbb{P}(R_n|D_1) \times \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(R_n|D_2) \times \mathbb{P}(D_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1) = \frac{4}{9}.}$

4. Une fois le dé choisi, les lancers deviennent indépendants, on en déduit

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|D_1) = \mathbb{P}(R_1|D_1) \times \mathbb{P}(R_2|D_1).}$$

   De même, on a $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2|D_2) = \mathbb{P}(R_1|D_2) \times \mathbb{P}(R_2|D_2)$. En utilisant de nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (D_1, D_2), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2|D_1) \times \mathbb{P}(D_1) + P(R_1 \cap R_2|D_2) \times \mathbb{P}(D_2) \\ &= \mathbb{P}(R_1|D_1) \times \mathbb{P}(R_2|D_1) \times \frac{1}{3} + \mathbb{P}(R_1|D_2) \times \mathbb{P}(R_2|D_2) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{9}.}$

5. Soit n un entier naturel non nul. Une fois le dé choisi, les lancers deviennent indépendants, on en déduit

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n | D_1) = \mathbb{P}(R_1|D_1) \times \mathbb{P}(R_2|D_1) \times \dots \cap \mathbb{P}(R_n|D_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n | D_2) = \mathbb{P}(R_1|D_2) \times \mathbb{P}(R_2|D_2) \times \dots \cap \mathbb{P}(R_n|D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \dots \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

En utilisant de nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (D_1, D_2), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n | D_1) \times \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n | D_2) \times \mathbb{P}(D_2) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n+2}{3^{n+1}}.}$

Ensuite, comme $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) &= \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n \cap R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)} \\ &= \frac{\frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n+1}{3 \times (2^{n-1}+1)}.}$

---

6. $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \neq 0$ et $\mathbb{P}(D_1) \neq 0$. D'après la formule de Bayes, on a donc

$$\mathbb{P}(D_1 | R_1 \cap R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 | D_1) \times \mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(D_1 | R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3}.}$

Soit n un entier naturel non nul. $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(D_1) \neq 0$. D'après la formule de Bayes, on a donc

$$\mathbb{P}(D_1 | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n | D_1) \times P(D_1)}{P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(D_1 | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n}{2^n+2}.}$

---

7. Soit n un entier naturel non nul. On a vu en 6. que $\mathbb{P}(D_1 | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n}{2^n+2} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}$.

On a vu aussi en 5. que $\mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n+1}{3 \times (2^{n-1}+1)}$. On a donc

$$P(D_1 | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) - \mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} - \frac{2^n+1}{3 \times (2^{n-1}+1)} = \frac{2^{n-1}-1}{3 \times (2^{n-1}+1)} \geqslant 0$$

car $n \geqslant 1$. Donc $\boxed{\text{il vaut mieux parier sur le fait que le dé soit } D_1.}$