Devoir en Temps Limité n° 7

Problème Mines-Ponts MP 2010

Dénombrements de certaines matrices binaires

A. Questions préliminaires

1. Pour $n = 2$, c'est facile, on a $\boxed{\mathcal{U}_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}.}$

   Pour $n = 3$, on remarque que chaque ligne et chaque colonne doit comporter exactement un terme nul. On tire $\boxed{\mathcal{U}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.}$

---

2. Vu la définition de $\mathcal{U}_n$, on a pour $A \in \mathcal{U}_n$, $AX_0 = 2X_0$ et comme $X_0 \neq 0$,

$$\boxed{X_0 \text{ vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 2.}$$

---

3. Pour des raisons de symétrie, en sommant toutes les matrices de $\mathcal{U}_n$, on obtient une matrice dont tous les cœfficients sont égaux. Vu la définition de h_n, on a alors $\boxed{\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{U}_n} A = h_n J.}$

   Pour un argument plus précis, si on appelle $\mathcal{H}'_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{U}_n$ ayant un 1 en une position fixée (i, j), alors l'application qui à A associe la matrice obtenue par les transformations $L_1 \leftrightarrow L_i$ et $C_1 \leftrightarrow C_j$ est une bijection de $\mathcal{H}'_n$ vers $\mathcal{H}_n$ (la réciproque consiste à faire les mêmes opérations), ce qui confirme qu'il y a autant de 1 en une position (i, j) quelconque dans les matrices de $\mathcal{U}_n$ que de 1 en position $(1, 1)$, soit h_n.

B. Étude du cardinal de $\mathcal{U}_n$

4. On a alors d'une part

$$\sum_{A \in \mathcal{U}_n} AX_0 = \sum_{A \in \mathcal{U}_n} 2X_0 = 2u_n X_0$$

   et d'autre part

$$\sum_{A \in \mathcal{U}_n} AX_0 = \left(\sum_{A \in \mathcal{U}_n} A \right) X_0 = h_n J X_0 = n h_n X_0.$$

   Comme $X_0 \neq 0$, on tire $\boxed{n h_n = 2u_n.}$

---

5. Comme dans la question 3., les matrices de $\mathcal{H}_n$ ont un 1 en position $(1, 1)$ et deux autres 1 en positions $(1, j)$ et $(i, 1)$ avec $i, j \in [\![2, n]\!]$. Quitte à considérer la bijection qui effectue $L_2 \leftrightarrow L_i$ et $C_2 \leftrightarrow C_j$, on obtient que le nombre de telles matrices à (i, j) fixé est aussi k_n.

   Finalement, tous ces $(n-1)^2$ cas étant disjoints, $\boxed{h_n = k_n \times (n-1)^2.}$

---

6. Soit $n \geqslant 4$.
Notons $\mathcal{K}_n^1$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{K}_n$ avec un 1 en position $(2,2)$. Une telle matrice A s'écrit par blocs $A = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ où $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' \in \mathcal{U}_{n-2}$: elles sont donc au nombre de $\left|\mathcal{K}_n^1\right| = u_{n-2}$.
Notons $\mathcal{K}_n^2$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{K}_n$ un 0 en position $(2,2)$. Une telle matrice s'écrit par blocs $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & A' & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$ où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ possède un 0 en position $(1,1)$, un 1 sur la première ligne et un 1 sur la première colonne, et exactement deux 1 dans chacune des autres lignes et colonnes. En modifiant le cœfficient en position $(1,1)$ en 1, on décrit exactement les matrices de $\mathcal{H}_{n-1}$. De telles matrices A sont donc au nombre de $\left|\mathcal{K}_n^2\right| = h_{n-1}$.

Les cas étant disjoints, $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n^1 \sqcup \mathcal{K}_n^2$, on tire $\boxed{k_n = u_{n-2} + h_{n-1}.}$

---

7. Soit $n \geqslant 4$. D'après les questions précédentes,
   - $h_{n-1} = \dfrac{2u_{n-1}}{n-1}$ (question 4)
   - $k_n = \dfrac{h_n}{(n-1)^2} = \dfrac{2u_n}{n(n-1)^2}$ (questions 4 et 5)
   - $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ (question 6)

   Ainsi, $\boxed{\dfrac{2u_n}{n(n-1)^2} = \dfrac{2u_{n-1}}{n-1} + u_{n-2}.}$ Puis, en divisant par $(n-2)!^2$, $\boxed{2nw_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2}.}$

   Comme $w_0 = 1$, $w_1 = 0$, $w_2 = \dfrac{1}{4}$, $w_3 = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$, on vérifie qu'on a bien aussi $6w_3 = 4w_2 + w_1$ et $4w_2 = 2w_1 + w_0$ de telle sorte que la relation est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

---

8. On a déjà $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ w_n \geqslant 0.}$

   On montre par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $w_n \leqslant 1$ ».
   On a déjà $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in [\![0,3]\!]$ (il faut au moins deux initialisations).
   Soit $n \geqslant 4$ tel que $\mathcal{P}(n-2)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies.
   Alors $2nw_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2} \leqslant 2(n-1) + 1 \leqslant 2n$ donc $w_n \leqslant 1$ ce qui établit la récurrence.

   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0\ ,\ w_n \in [0,1].}$

   La relation de récurrence de la question précédente donne pour $n \geqslant 2$, $w_{n-2} = 2nw_n - 2(n-1)w_{n-1}$ qui est un terme général de série télescopique. Donc, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_{k-2} = 2nw_n - 0$.

   Ainsi $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_{k-2}\right)_{n\geqslant 2} = (2nw_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante donc a une limite finie ou $+\infty$. Si cette limite est finie et vaut ℓ, elle est strictement positive car $4w_2 = 1 > 0$ et $w_n \sim \dfrac{\ell}{2n}$ est un terme général de série divergente ce qui est contradictoire (même si c'est le résultat recherché !).

   Cette limite est donc $+\infty$ et donc $\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$

   Autre argument possible : comme cette suite $(2nw_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante, pour $n \geqslant 2$, $2nw_n \geqslant 4w_2 = 1$ donc $w_n \geqslant \dfrac{1}{2n}$ et on conclut en comparant à la série harmonique (divergente).

Comme $\sum w_n$ diverge alors que $(w_n)_n$ est bornée,

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum w_n x^n \text{ est égal à } 1.}$$

9. Soit $x \in]-1,1[$. On utilise la relation de récurrence de la question 7 :

$$2\sum_{n=2}^{+\infty} n w_n x^n = 2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)w_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2}x^n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+2}$$

donc, avec $w_1 = 0$,

$$2(1-x)x\sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n-1} - 2w_1 x = x^2 W(x)$$

et comme on peut dériver terme à terme W sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$, on obtient

$$\boxed{\forall\, x \in]-1,1[\setminus\{0\},\;\; 2(1-x)W'(x) - xW(x) = 0.}$$

encore valable pour $x = 0$ par continuité (W est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.)
Il s'agit d'une EDL d'ordre 1 avec $x \mapsto 2(1-x)$ et $x \mapsto -x$ continues sur $]-1,1[$, la première ne s'annulant pas.
On calcule $\displaystyle\int \frac{x}{2(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln|1-x| - x}{2} + C.$
On a donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que $W : x \mapsto A\mathrm{e}^{-\frac{\ln|1-x|-x}{2}} = A\dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}$.

Comme $W(0) = w_0 = 1$, on tire $A = 1$ et $\boxed{W : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1-x}}.}$

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

10. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ développable en série entière sur $]-1,1[$ (au moins, $\mathbb{R}$ si $\beta \in \mathbb{Z}^-$, par produit (de Cauchy), $\boxed{\phi \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[}$ (au moins).

11. Soit $x \in]-1,1[$. $(1-x)^{-\beta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\beta(-\beta-1)\dots(-\beta-n+1)}{n!}(-x)^n$ avec

$$a_n = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!}$$

donc $\boxed{a_n = \dfrac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}}$ en remarquant d'abord que $\Gamma(\beta) > 0$ par positivité améliorée car $t \mapsto t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive, non contamment nulle sur $]0,+\infty[$ et que

$$\Gamma(n+\beta) = (n+\beta-1)\Gamma(n+\beta-1) = \cdots = (n+\beta)(n+\beta-1)\cdots\beta\cdot\Gamma(\beta)$$

en appliquant par récurrence la propriété $\Gamma(\beta+k) = (\beta+k-1)\Gamma(\beta+k-1)$.

12. On obtient par produit de Cauchy

$$\begin{aligned}\phi_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} a_k = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{n-k}\Gamma(k+\beta)}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}\Gamma(k+\beta) \\ &= \frac{1}{n!\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} u^k\right) u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n!\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} (\alpha+u)^n u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

donc $\boxed{\phi_n = \dfrac{\psi_n}{n!\Gamma(\beta)}}$ (le calcul donne la bonne définition de ψ_n).

13. Comme proposé par l'énoncé, on étudie, pour $n \geqslant 1$ fixé, les variations de $f : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n$ qui est bien dérivable sur $[-\alpha, +\infty[$.
On a $f' : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}\left(n(\alpha+u)^{n-1} - (\alpha+u)^n\right) = \mathrm{e}^{-u}\,(n-\alpha-u)\,(\alpha+u)^{n-1}$.
D'où le tableau de variation

x	$-\alpha$		$n-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\alpha-n}n^n$	$\searrow$	0

La suite est assez technique.
Comme a est fixé, on a un rang N à partir duquel $n-\alpha > a$.
Posons $n \geqslant N$. On a, vu les variations ci-dessus et par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^a u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^a u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-a}(\alpha+a)^n\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-a}(\alpha+a)^n a^\beta}{\beta}.$$

Par ailleurs, toujours avec les variations ci-dessus, la positivité et la croissance de l'intégrale,

$$\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u \geqslant \int_a^{n-\alpha} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-a}(\alpha+a)^n}{\beta}\left((n-\alpha)^\beta - a^\beta\right).$$

Ainsi, comme $n-\alpha > a$, $\left|\displaystyle\int_0^a u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \underbrace{\frac{a^\beta}{(n-\alpha)^\beta - a^\beta}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \displaystyle\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u.$

Finalement, $\boxed{\left|\displaystyle\int_0^a u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u\right| = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\displaystyle\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u\right).}$

14. Cette question est très difficile ! La question précédente donne $\psi_n \sim \displaystyle\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u$.
On cherche à montrer qu'on peut trouver $a > |\alpha|$ tel que

$$\int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u \sim \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u - \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u\right| &= \left|\int_a^{+\infty} \left((\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}\right)\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \int_a^{+\infty} \left|(\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}\right|\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Soit $f : t \mapsto t^{\beta-1}$ et $u \geqslant a$. f est continue sur $[u, u+\alpha]$ et dérivable sur $]u, u+\alpha[$, donc par théorème des accroissements finis, on a $c_u \in]u, u+\alpha[$ tel que $(\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1} = \alpha f'(c_u) = \alpha(\beta-1)c_u^{\beta-2}$.
Or

$$\begin{aligned}
0 \leqslant c_u^{\beta-2} \leqslant \max_{t\in[u,u+\alpha]} t^{\beta-2} &= \max\left(u^{\beta-2}, (u+\alpha)^{\beta-2}\right) = (\alpha+u)^{\beta-2} \max\left(\left(\frac{u}{u+\alpha}\right)^{\beta-2}, 1\right) \\
&\leqslant (\alpha+u)^{\beta-2} \max\left(\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+u}\right)^{\beta-2}, 1\right) \\
&\leqslant u^{\beta-2} \max\left(1, \left(1 - \frac{\alpha}{a+\alpha}\right)^{\beta-2}\right) \quad \text{(valable pour } \beta > 0 \text{ quelconque).}
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $C = |\alpha|\,|\beta-1| \max\left(1, \left(\dfrac{a}{a+\alpha}\right)^{\beta-2}\right)$,

$$\int_a^{+\infty} \left|(\alpha+u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}\right| \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n \,\mathrm{d}u \leqslant C \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\,\mathrm{d}u.$$

En intégrant par partie sur un segment $[a, A]$ puis en faisant $A \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\,\mathrm{d}u &= -\frac{\mathrm{e}^{-a}(\alpha+a)^{n+\beta-1}}{n+\beta-1} + \frac{1}{n+\beta-1}\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{n+\beta-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

l'inégalité étant valable au moins à partir d'un certain rang.
On obtient alors $\displaystyle\int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u - \int_a^{+\infty} u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u = \mathrm{o}\left(\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u\right)$ ce qui permet bien de conclure avec la question précédente que $\boxed{\psi_n \sim \displaystyle\int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}u.}$

---

15. Question plutôt difficile également.
À l'aide du changement de variable $t = \alpha + u$ (licite car affine, donc $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]a, +\infty[$ sur $]a+\alpha, +\infty[$), avec la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\alpha} \int_{a+\alpha}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\alpha}\left(\Gamma(n+\beta) - \int_0^{a+\alpha} \mathrm{e}^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t\right).$$

Reste à voir que $\displaystyle\int_0^{a+\alpha} \mathrm{e}^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\Gamma(n+\beta)\right)$.
Soit $n \geqslant 1$. On a alors $n+\beta-1 > 0$ et on remarque que pour tout $t \in]0, a+\alpha[$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{n+\beta-1} \leqslant (a+\alpha)^{n+\beta-1}$, donc, par croissance de l'intégrale, avec $0 < a+\alpha$,

$$0 \leqslant \int_0^{a+\alpha} \mathrm{e}^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t \leqslant (a+\alpha)^{n+\beta}.$$

Mais $\Gamma(n+\beta) = (n-1+\beta)(n-2+\beta)\cdots\beta\cdot\Gamma(\beta) \geqslant (n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\beta\cdot\Gamma(\beta) = (n-1)!\beta\cdot\Gamma(\beta)$.
donc $(a+\alpha)^{n+\beta} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\Gamma(n+\beta)\right)$ par croissances comparées, puis, par encadrement,

$$\int_0^{a+\alpha} \mathrm{e}^{-t}t^{n+\beta-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\Gamma(n+\beta)\right).$$

Finalement, $\boxed{\psi_n \sim \mathrm{e}^{\alpha}\Gamma(n+\beta).}$

---

16. Avec les questions 12 et 15, appliqué au cas de $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, vu la question 9 et par unicité des cœfficients du développement en série entière,

$$\frac{u_n}{(n!)^2} = w_n = \phi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1/2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

On obtient, comme en 11, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ donc

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n(2n)(2n-2)\cdots 2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

On a alors, avec la formule de Stirling,

$$u_n \sim \frac{(2n)!}{\sqrt{\mathrm{e}}2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{e}2^{2n}}$$

donc $\boxed{u_n \sim 2\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n+\frac{1}{2}}.}$

Fin