# Sujet CCINP

## Exercice : CCINP MP 2021

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : t \in ]0,1] \mapsto t^{2k} \ln t$. C'est une fonction continue sur $]0,1]$ et $|f_k(t)| = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $t^{2k+1/2} \ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.
   Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonctions positives, $\boxed{f_k \text{ est intégrable sur } ]0,1].}$

   Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$,
   $$\int_\varepsilon^1 t^{2k} \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1}\int_\varepsilon^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln\varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right).$$
   Donc, en faisant tendre $\varepsilon$ vers $0$ et par croissances comparées, $\boxed{\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}.}$

2. $f$ est continue et positive sur $]0,1[$ et, de nouveau, $f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t}f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc par comparaison de fonctions positives, $f$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.
   Puis $f(t) = \frac{\ln(1+(t-1))}{(t+1)(t-1)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{t-1}{2(t-1)} = \frac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \frac{1}{2}$ donc $f$ est prolongeable par continuité en $1$ donc intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
   Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur } ]0,1[.}$
   Puis, pour $t \in ]0,1[$, $t^2 \in ]-1,1[$ donc $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.
   Justifions l'interversion série intégrale par le théorème de convergence $N_1$ :
   **H1.** La série de fonction $\sum f_k$ converge simplement vers $-f$ qui est continue sur $]0,1[$.
   **H2.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k$ est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question 1. car négative et d'intégrale convergente.
   **H3.** Avec 1., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k^2}$ avec $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente en tant que série de Riemann avec $2 > 1$, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum \int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

   On a alors $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (qui est positif, ce qui est rassurant).
   Or, si $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre $N$ vers $+\infty$, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et finalement $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.}$

## Problème : Séries de Lambert – CCINP MP 2019

### A. Propriétés

1. Avec $x \in ]-1,1[$, $x^n \to 0$ donc $1-x^n \to 0$ et $\boxed{1-x^n \sim 1.}$ On a donc pour $x \neq 0$, $\left|a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}\right| \sim |a_n|\,|x|^n$ qui est un terme général de série convergente car la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ a un rayon de $1$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} \text{ converge absolument pour tout } x \in ]-1,1[.}$ (Il s'agit de la série nulle pour $x=0$).

   En prenant $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n^2},}$ la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ est de même rayon de convergence que $\sum x^n$ soit $1$ et pour $x=2$, $\left|a_n \dfrac{2^n}{1-2^n}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de Lambert converge (absolument) pour $x=2$ par comparaison de séries à termes positifs.

---

2. Soit $0<b<1$. Pour tout $x \in [-b,b] \subset [-1,1]$, $\left|a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}\right| = |a_n| \dfrac{x^n}{1-x^n} \leqslant |a_n| \dfrac{b^n}{1-b^n} = \left|a_n \dfrac{b^n}{1-b^n}\right|$ qui ne dépend pas de $x$ et est un terme général de série convergente d'après la question précédente.

   Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} \text{ converge normalement donc uniformément sur tout segment } [-b,b]}$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

---

3. On applique le théorème de continuité des séries de fonctions.

   **H1** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ est continue sur $]-1,1[$ par opérations.

   **H2** $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de $]-1,1[$ d'après la question précédente.

   Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } ]-1,1[.}$

   On applique ensuite le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions (qui redonne la continuité).

   **H1** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par opérations.
   Comme $f_n : x \mapsto a_n \left(\dfrac{1}{1-x^n} - 1\right)$, $f_n' : x \mapsto \dfrac{n a_n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

   **H2** $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ (et même localement uniformément comme vu ci-dessus).

   **H3** $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-b,b] \subset ]-1,1[$ avec $0<b<1$ car si $x \in [-b,b]$, $\left|f_n'(x)\right| = f_n'(x) \leqslant \dfrac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ qui ne dépend pas de $x$ et qui est équivalent à $n\,|a_n|\,b^{n-1} = \dfrac{1}{b}\,|n a_n b^n|$, terme général de série convergente car la série entière $\sum n a_n x^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n x^n$, soit $1$ et $b \in ]-1,1[$. Finalement, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge, d'où le résultat.

   Ainsi, $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, de dérivée $f' : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ et en particulier, $\boxed{f'(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n a_n 0^{n-1}}{(1-0^n)^2} = a_1.}$

---

4. Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels. Comme les $I_n = \{(k,p)\in A, kp=n\}$ pour $n\in\mathbb{N}$ sont des parties deux à deux disjointes de $A=(\mathbb{N}^*)^2$ qui le recouvrent (tout couple $(k,p)\in A$ est dans $I_{kp}$ et seulement dans celui-là), on peut utiliser le théorème de sommation par paquets qui nous dit d'une part que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$ existe et d''autre part qu'elle vaut $\displaystyle\sum_{(n,p)\in A} u_{n,p}$.

   Mais le théorème de Fubini (qui est aussi un théorème de sommation par paquets) nous dit, connaissant déjà la sommabilité, que cette même somme est aussi égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)$, qui converge bien.

   On peut donc bien écrire que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right).}$

   Soit $x\in]-1,1[$.
   Pour démontrer la sommabilité de la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$, on utilise le théorème de Fubini : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}|a_n|\,|x^n|^p$ converge car $|x^n|\in]-1,1[$ (elle est géométrique), vers

$$\sum_{p=1}^{+\infty}|a_n|\,|x^n|^p = |a_n|\,\frac{|x|^n}{1-|x|^n} = \left|a_n\frac{x^n}{1-x^n}\right|$$

   qui est un terme général de série convergente car $x\in]-1,1[$ et d'après 1.

   On a donc bien $\boxed{(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}\text{ sommable.}}$ Avec un calcul similaire (et licite), on obtient aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n}.$$

   On peut alors appliquer l'identité précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k\right) x^n$$

   Or, si $n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{(k,p)\in I_n} a_k = b_n = \sum_{d|n} a_d$, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.}$

## B. Exemples

5. On est bien dans les hypothèses de la partie A : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x^n$ a un rayon de convergence de $1$.

   D'après la question précédente, pour tout $x\in]-1,1[$, on peut écrire $\boxed{\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n}$ avec pour tout $n\geqslant 1$, $d_n=\displaystyle\sum_{d|n} 1$ qui est bien le nombre de diviseurs de $n$.

---

6. Soit $n\geqslant 1$. $\varphi(n)$ désigne d'après l'énoncé le nombre de nombres entre $0$ et $n$ premiers avec $n$. On a alors $1\leqslant\varphi(n)\leqslant n+1\sim n$. Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x^n$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(n+1)x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^n$ ont même rayon de convergence, qui vaut $1$, donc par propriété du cours $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\varphi(n)x^n\text{ a aussi un rayon de convergence de } 1.}$

   Les diviseurs (positifs) de $12$ sont $1$, $2$, $3$, $4$, $6$, $12$.

On calcule $\varphi(1) = 2$ (pour $0$ et $1$), $\varphi(2) = 1$ (pour $1$), $\varphi(3) = 2$ (pour $1$ et $2$), $\varphi(4) = 2$ (pour $1$ et $3$), $\varphi(6) = 2$ (pour $1$, $5$), $\varphi(12) = 4$ (pour $1$, $5$, $7$, $11$).
Donc $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) = ...13$ et non $12$.

**Il y a une erreur d'énoncé** (présente dans le sujet original) car il faut prendre des entiers premiers avec $n$ non nuls, mais seul le calcul de $\varphi(1)$ est impacté. On obtient alors $\varphi(1) = 1$ et la formule devient correcte. On pourrait aussi interpréter « inférieur à $n$ » comme strictement inférieur contrairement à l'usage en langue française, mais diviseur, lui, est bien pris au sens large... Notons qu'avec la formule admise, cette erreur d'énoncé a peu d'impact sur la suite (de la question, et l'impact est nul sur le reste du problème).

*Notons que la formule admise peut se démontrer en une ligne avec l'argument élégant : les $n$ nombres rationnels $\dfrac{m}{n}$ pour $1 \leqslant m \leqslant n$ s'écrivent de manière unique sous forme irréductible $\dfrac{\ell}{d}$ avec $1 \leqslant \ell \leqslant d$, $\ell \wedge d = 1$ et $d$ diviseur de $n$, et il y a exactement $\varphi(d)$ fractions irréductible pour chaque diviseur $d$ de $n$.*

On peut de nouveau utiliser la question 4 de la partie $A$ et la formule admise : pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

en reconnaissant la dérivée de la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ce qui est licite car on travaille dans son disque ouvert de convergence.

7. D'après le cours, pour tout $x \in ]-1, 1[$, $\ln(1 + x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

   Pour prendre la limite en $1$ de la série de fonction, on a besoin d'une convergence uniforme au voisinage de $1$.
   Or, si $x \in [0, 1]$, le théorème spécial sur les séries alternées s'applique : $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ tend vers $0$ en décroissant.
   On peut donc majorer le reste, pour $n \geqslant 1$, $|R_n(x)| = \left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ qui ne dépend pas de $x$ et tend vers $0$.
   Donc la série entière converge uniformément sur $[0, 1]$, et par théorème de la double limite et par continuité de ln en $2$ (et aussi par unicité de la limite), on obtient $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2}$ (qui a bien le signe de son premier terme).

8. Si $x \in ]-1, 1[$ et $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1 - x^n}$.

   Pour appliquer le théorème de la double limite, on a de nouveau besoin de convergence uniforme au voisinage de $0$.
   Or si $x \in [-b, b] \subset ]-1, 1[$, $\left| (-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1 - x^n} \right| = \dfrac{|x|^{n-1}}{1 - x^n} \leqslant \dfrac{b^{n-1}}{1 - b^n}$ qui est indépendant de $x$ et terme général de série convergente car équivalent à $b^{n-1}$ avec $b \in [0, 1[$, donc on a convergence normale donc uniforme sur $[-b, b]$ et par théorème de la double limite, $\boxed{\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{0^{n-1}}{1 - 0^n} = -1.}$ Ainsi, $\boxed{f(x) \sim -x \text{ au voisinage de } 0.}$

   Comme $f(0) = 0$, cette limite est aussi la valeur de $\boxed{f'(0) = -1 = a_1}$ ce qui est cohérent avec A.3 (qui s'applique bien car la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n x^n$ est de rayon $1$.)

9. Soit $x \in ]-1,1[$. On a $f(x)(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$.

   Sous-réserve de pouvoir appliquer le théorème de la double limite, on obtiendrait $f(x)(1-x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, ce qui permet de conclure avec 7.

   Il suffit donc d'avoir convergence uniforme au voisinage de $1$. On vérifie que le théorème spécial s'applique de nouveau pour $x \in ]0,1[$.

   si $n \geqslant 1$, $\frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = (1-x)\left(\frac{1}{1-x^n} - 1\right)$ tend vers $0$ est décroissant.

   Donc pour tout $n \geqslant 1$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{\sum\limits_{k=0}^{n} x^k} \leqslant \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^{n} x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers $0$ uniformément en $x$,

   donc par convergence uniforme le théorème de la double limite s'applique et permet de conclure $\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}}$.

*Fin*