Corrigé du Concours Blanc

Problème 1 : Fonctions Gamma et Digamma : CCINP MP 2016

I. Partie préliminaire

1. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $h_x \ : \ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t+(x-1)\ln t}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive (utile pour avoir le droit d'utiliser des équivalents).

Intégrabilité sur $[1,+\infty[$ **:** par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente : f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$. (Ici, pas de condition sur x.)

Intégrabilité sur $]0,1]$ **:** $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $x>0$, donc f_x est intégrable sur $]0,1]$.

Donc $\boxed{h_x \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

(b) Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction h_x est continue, positive, non constamment nulle sur $]0,+\infty[$, donc par positivité améliorée (version intégrale généralisée), $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0.}$

(c) On définit $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ \times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \end{array}\right.$

On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ sous le signe intégrale.

H1 Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \ln t \cdot \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}.$$

H2 Pour tout $x>0$, la fonction $h_x : t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 1.a.

H3.1 Pour tout $t>0$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

H3.2 Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$.

H3.3 : Domination On domine sur tout segment : soit $0<a<b$. On a

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) = \begin{cases} -\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ \ln t \cdot \mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$$

où ϕ est une fonction continue par morceaux, positive sur $]0,+\infty[$, et intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t}t^{b-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et sur $]0,1]$ car $-\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t}t^{a-1} = \underset{t\to0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1-a<\alpha<1$ par croissances comparées, donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc $\boxed{\Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ et } \Gamma' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln t \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

2. (a) Comme la fonction $t \in [1,+\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ est continue (par morceaux suffirait), positive, décroissante, un théorème du cours conséquence de la comparaison série-intégrale donne le fait que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant2} u_n \text{ converge.}}$

(b) Notons $\ell = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$. On remarque que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$, donc

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln n - \ln 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell,$$

donc $\boxed{H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \ell = \gamma.}$

II. Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

3. (a) La fonction ln est concave (car dérivable à dérivée décroissante) sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sa courbe se situe sous la tangente en 1 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_*^+, \;\; \ln t \leqslant t - 1$$

et donc $\boxed{\text{pour tout } x = 1 - t < 1,\ \ln(1-x) \leqslant -x.}$

Soit $x > 0$ et $t > 0$.

- Si $t > n$, on a bien $0 = f_n(t) \leqslant e^{-t} t^{x-1}$.
- Si $t \leqslant n$, alors $0 \leqslant f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)} t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-n \frac{t}{n}} t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1}$.

Dans tous les cas, $\boxed{0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t} t^{x-1}.}$

(b) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$.

On applique le théorème de convergence dominée :

H1 Pour tout $t > 0$, à partir du rang $n = \lceil t \rceil$,

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)} t^{x-1} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} t^{x-1} = \mathrm{e}^{-t + \mathrm{o}(1)} t^{x-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

avec f continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

H3 : Domination Comme vu à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, $|f_n(t)| \leqslant f(t)$ avec f continue (par morceaux), positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ vu la question 1.a.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0, +\infty[,\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(x).}$

4. (a) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, 1]$ et $(1-u)^n u^{x-1} \sim \frac{1}{u^{1-x}}$ au voisinage de 0, avec $1 - x < 1$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et $\boxed{I_n(x) \text{ existe bien.}}$

Soit $n \geqslant 1$. On procède à une intégration par parties, $u \mapsto (1-u)^n$ et $u \mapsto \frac{u^x}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\int_\varepsilon^1 (1-u)^n u^{x-1}\, \mathrm{d}u = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_\varepsilon^1 + \frac{n}{x} \int_\varepsilon^1 (1-u)^{n-1} u^x\, \mathrm{d}u = -(1-\varepsilon)^n \frac{\mathrm{e}^{x \ln \varepsilon}}{x} + \frac{n}{x} \int_\varepsilon^1 (1-u)^{n-1} u^x\, \mathrm{d}u$$

puis, en faisant $\varepsilon \to 0$, $\boxed{I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).}$

(b) Soit $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$. En utilisant la question précédente, on obtient

$$I_n(x)=\frac{n}{x}I_{n-1}(x+1)=\frac{n(n-1)}{x(x+1)}I_{n-2}(x+2)=\cdots=\frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}I_{n-n}(x+n)$$

(par récurrence finie). Or $I_0(x+n)=\displaystyle\int_0^1 u^{x+n-1}\,\mathrm{d}u=\frac{1^{x+n}}{x+n}=\frac{1}{x+n}$.

Donc $\boxed{I_n(x)=\dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$

(c) Soit $x\in]0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}$. À l'aide d'un changement de variable $u=\dfrac{t}{n}$ (avec $t\mapsto\dfrac{t}{n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0,n[$ dans $]0,1[$),

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t=n\int_0^1(1-u)^n\ (nu)^{x-1}\,\mathrm{d}u=n^x I_n(x)$$

donc avec la question 3.b et la question précédente, $\boxed{\dfrac{n!\ n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\Gamma(x).}$

5. Montrons la formule proposée dans l'énoncé : soit $n\geqslant 1$ et $x\in]0,+\infty[$.

$$\mathrm{e}^{xH_n}=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}\right)\mathrm{e}^{-x\ln n}=\frac{1}{n^x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}}$$

ce qui donne bien $\boxed{\dfrac{1}{n^x}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=\mathrm{e}^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right].}$

On a ensuite $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!\ n^x}=\dfrac{x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}}{n^x}=\dfrac{x}{n^x}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=x\mathrm{e}^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ d'après la question précédente et en utilisant le fait que $\Gamma(x)\neq 0$ (question 1.b).

Comme de plus $x\mathrm{e}^{xH_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}x\mathrm{e}^{\gamma x}\neq 0$ (question 2.b), on en déduit que $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]\right)_n$ converge, et en notant $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]$ sa limite, on obtient par unicité de la limite

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].}$$

6. (a) La convergence simple de la série de fonctions provient directement du fait que pour tout $x>0$,

$$0\leqslant\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

mais ce n'est pas ce qui est attendu ici.

Soit $x>0$. La question précédente nous a donné le fait que

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{x\Gamma(x)\mathrm{e}^{\gamma x}}>0$$

donc par continuité du ln, $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$ converge, vers $-\ln x-\ln\Gamma(x)-\gamma x$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série }\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]\text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$

(b) Vu la remarque de la question précédente, on a $g:x\mapsto-\ln x-\ln\Gamma(x)-\gamma x$ de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations vu ce qui a été montré en 1.c.
Mais il faut utiliser le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions pour exprimer g' sous forme de somme de série.
Soit pour $k\in\mathbb{N}^*$, $g_k:x\in]0,+\infty[\mapsto\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}$.

H1 Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, de dérivée $g_k':x\mapsto\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}$.

H2 D'après la question précédente, $\sum_{k\geqslant 1}g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_*^+$.

H3 Soit $a>0$, $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in]0,a]$, $|g_k'(x)|=\left|\frac{-x}{k(k+x)}\right|=\frac{x}{k(k+x)}\leqslant\frac{a}{k^2}$ qui est un terme général de série convergente et ne dépend pas de x donc $\sum_{k\geqslant 1}g_k'$ converge normalement donc uniformément sur $]0,a]$ pour tout $a>0$ donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_*^+$.

On en déduit que $\boxed{g\text{ est de classe }\mathcal{C}^1\text{ sur }\mathbb{R}_*^+}$ (ce que l'on avait déjà) et surtout que $\boxed{\text{pour tout }x>0,\ g':x\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right).}$

(c) Les résultats de la question précédente donnent alors, pour $x>0$,

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{x}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\gamma$$

donc $\boxed{\psi(x)=\frac{-1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).}$

7. (a) Par la question précédente, en télescopant, $\psi(1)=-1-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-1-\gamma+1$ donc $\boxed{\psi(1)=-\gamma.}$ Vu la question 1.c, $\boxed{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t=}\ \Gamma'(1)=\psi(1)\Gamma(1)=-\gamma\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\boxed{-\gamma.}$

(b) Soit $x\in]0,+\infty[$. Avec la question 6.c, $\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+1+x}\right)$, donc, par télescopage, $\boxed{\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}.}$ (Résultat qui se retrouve aussi avec la célèbre formule $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$...)

On a alors pour tout entier $n \geqslant 2$, par telescopage, $\psi(n) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi(k+1) - \psi(k))$, ce qui donne $\boxed{\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$ avec ce qui précède et la question précédente.

(c) Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $y > 0$, $|j_k(y)| = \left|\frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}\right| = \frac{|x-1|}{(k+y+1)(k+y+x)} \leqslant \frac{|x-1|}{k^2}$ qui ne dépend pas de y est un terme général de série convergente.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} j_k \text{ converge normalement donc uniformément sur }]0,+\infty[.}$

D'après 6.c,

$$\psi(x+y) - \psi(1+y) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{x+y} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+y} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+y+1}\right) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{x+y} + \sum_{k=1}^{+\infty} j_k(y).$$

On calcule la limite pour $y \to +\infty$ avec le théorème de la double limite : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $j_k(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ et $\sum_{k\geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, donc $\psi(x+y) - \psi(1+y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$.

On en déduit alors que $\boxed{\psi(x+n) - \psi(1+n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

8. D'après la question 7, la fonction Digamma ψ convient au problème posé.
Respectivement, si f est solution du problème, soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x+k+1) - f(x+k) = \frac{1}{x+k}$, donc

$$f(x+n) - f(x+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (f(x+k+1) - f(x+k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x+k}.$$

ainsi, $f(x+n) = f(x) + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x+k}$.

En particulier pour $x = 1$, $f(1+n) = f(1) + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Donc $f(x+n) - f(1+n) = f(x) + \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n}$.

Par unicité de la limite pour $n \to +\infty$, on tire $f(x) + \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k}\right) = 0 = f(x) - \psi(x)$, la convergence de la série et l'expression de ψ provenant de la question 6.
Donc $f = \psi$.

Finalement, $\boxed{\psi \text{ est l'unique solution au problème posé.}}$

Problème 2 : Diagonalisation d'un couple de matrices : d'après CCP PC 2012

I. Diagonalisabilité dans un cas particulier

1. B est triangulaire avec un cœfficient nul sur la diagonale, on calcule $\det A = (3-2)\cdot(-1) \neq 0$ avec un déterminant triangulaire par blocs, donc $\boxed{B \text{ n'est pas inversible mais } A \text{ l'est.}}$

   Puis on calcule $A \times C = B$ donc $\boxed{C = A^{-1}B.}$

---

2. On calcule le déterminant triangulaire par blocs après factorisation par $2\lambda - 1$ sur la deuxième ligne

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4\lambda-2 & 2\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda+1 \end{vmatrix} = (2\lambda-1)(-3+2)(-2\lambda+1)$$

   donc $\boxed{\chi_{(A,B)}(\lambda) = (2\lambda-1)^2.}$ Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A,B) = \left\{\frac{1}{2}\right\}.}$

   Puis $E_{1/2}(A,B) = \mathrm{Ker}\left(\dfrac{1}{2}B - A\right) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\boxed{\text{de dimension } 2}$ car la matrice est de rang 1 (non nulle à colonnes deux à deux colinéaires) et comme $C_1 - 3C_2 = 0$ et $C_2 - C_3 = 0$, $\boxed{E_{1/2}(A,B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$ car ces deux vecteurs sont non colinéaires.

---

3. (a) On calcule, toujours avec un déterminant triangulaire par blocs et en factorisant par λ dans la première ligne et $\lambda - 2$ dans la deuxième

$$\chi_{(B,A)}(\lambda) = \det(\lambda A - B) = \begin{vmatrix} 3\lambda & \lambda & \lambda \\ 2\lambda-4 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(3-2)(2-\lambda)$$

   donc $\boxed{\chi_{(B,A)}(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2}$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(B,A) = \{0,2\}.}$

   (b) $E_0(B,A) = \mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Ker}\, A^{-1}B = \mathrm{Ker}\, C$ car A^{-1} est inversible donc $E_0(B,A) = E_0(C)$.
   Dans C, on remarque que $C_1 - 2C_2 = 0$ et (C_2, C_3) est libre donc $\mathrm{rg}\, C = 2$ et $\mathrm{Ker}\, C$ est de dimension 1, engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\boxed{E_0(B,A) = E_0(C) \text{ admet comme base } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.}$ Puis

$$E_2(B,A) = \mathrm{Ker}(2A - B) = \mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{2}B\right) = E_{\frac{1}{2}}(A,B) = \mathrm{Ker}\left(A^{-1}(2A-B)\right) = \mathrm{Ker}(2I_3 - C) = E_2(C)$$

   toujours avec A^{-1} est inversible.

   Ainsi, avec la question 2, $\boxed{E_2(B,A) = E_{\frac{1}{2}}(A,B) = E_2(C) \text{ admet comme base } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$

---

4. (a) Les sous-espaces propres $E_0(C)$ et $E_2(C)$ sont de dimension respective 1 et 2. Comme ils sont en somme directe et qu'on travaille en dimension 3, il n'y a pas d'autre valeur propre. Et comme la somme de leurs dimensions vaut 3, $\boxed{C \text{ est diagonalisable.}}$

De plus, toujours comme ils sont en somme directe, on obtient une base de vecteurs propres en concaténant des bases de chacun des deux sous-espaces obtenues à la question précédente : $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.
Donc, par formule de changement de base de l'endomorphisme canoniquement associé de la base canonique vers la base de vecteurs propres, $\boxed{C = RDR^{-1} \text{ avec } R = \begin{pmatrix}1&1&0\\-2&-3&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.}$

(b) On a par la question 1 et la précédente, $\boxed{B = AC = ARDR^{-1}.}$

Soit $\boxed{P = AR \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}$ (question 1) et $\boxed{Q = R^{-1} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).}$

On a alors $\boxed{A = PI_3Q \text{ et } B = PDQ.}$

II. Régularité et diagonalisabilité

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\boxed{\chi_{(A,B)}(\lambda) =}$ $\det(\lambda B - A) = \det\left(B\left(\lambda I_n - B^{-1}A\right)\right) =$ $\boxed{\det B \cdot \chi_{B^{-1}A}(\lambda)}$ avec $\det B \neq 0$

donc $\boxed{\chi_{(A,B)} \text{ est polynomiale de degré } n.}$

(b) Par définition du déterminant, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\,[\lambda B - A]_{\sigma(1),1} \cdots [\lambda B - A]_{\sigma(n),n}$$
est une combinaison linéaire de termes polynomiaux de degré au plus n, donc $\boxed{\chi_{(A,B)} \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus } n.}$

---

6. (a) Soit $\lambda \neq 0$. $\boxed{\chi_{(A,B)}(\lambda) =}$ $\det(\lambda B - A) = \det\left((-\lambda)\left(\frac{1}{\lambda}A - B\right)\right) =$ $\boxed{(-\lambda)^n \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$

On a $\lambda \neq 0$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$ donc $\chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ avec $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ donc $\boxed{(B,A) \text{ est régulier.}}$

(b) On a $\chi_{(B,A)} = X^r Q$ avec $Q = \sum_{k=r}^{s} a_k X^{k-r}$ donc $Q(0) = a_r \neq 0$.

Donc $\boxed{0 \text{ est racine de } \chi_{(B,A)} \text{ d'ordre de multiplicité } r.}$

Avec la question 6.a, $\chi_{(A,B)} : \lambda \mapsto (-1)^n \sum_{k=r}^{s} a_k \lambda^{n-k}$ avec $a_r \neq 0$ donc $\boxed{\chi_{(A,B)} \text{ est de degré } n - r.}$

(c) 5.a donne directement $\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$ et la question précédente donne $\boxed{(iii) \Longleftrightarrow (ii)}$ avec $r = 0$.

Enfin, si $0 \notin \mathrm{Sp}(B,A)$, $\det(-B) \neq 0$ donc $\det B \neq 0$ et B est inversible donc $\boxed{(iii) \Longrightarrow (i).}$

---

7. Comme à la fin de la partie précédente, on diagonalise $B^{-1}A = RDR^{-1}$ avec R inversible et D diagonale, donc $A = BRDR^{-1} = PDQ$ avec $P = BR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q = R^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B = PI_nQ$ donc $(A,B) \sim (D, I_n)$ donc $\boxed{(A,B) \text{ est diagonalisable.}}$

III. Un critère de diagonalisabilité

8. (a) On a $\boxed{E_0(C) = E_0(B, A)}$ exactement comme en 3.b, puis si B inversible, C l'est donc $\boxed{E_0(C) = \{0\} = E_\infty(A, B)}$ et si B n'est pas inversible, par définition $\boxed{E_0(B, A) = E_\infty(A, B).}$

   Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\boxed{E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)}$ exactement comme en 3.b.

   (b) On suppose que $\mathrm{Sp}(C) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

   Si B est inversible, $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \mathrm{Sp}(A, B) = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}\right\}$ d'après la question précédente.

   Si B n'est pas inversible, alors C ne l'est pas non plus, et 0 est valeur propre de C donc l'un des λ_i, disons λ_k. Alors $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \mathrm{Sp}(A, B) \cup \{\infty\} = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_{k-1}}, \infty\right\}$ vu la question précédente et la définition.

   Dans tous les cas, $\boxed{\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}\right\} \text{ où on a posé } \frac{1}{0} = \infty.}$

9. Si B est inversible, $\boxed{m_\infty(A, B) = 0 = n - d}$ vu 6.c et $\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A, B) = n}$ car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ donc $\chi_{(A,B)}$ est scindé, de degré n.

   Si B n'est pas inversible, $\boxed{m_\infty(A, B) = m_0(B, A) = n - d}$ d'après 6.b et

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A, B) + n - d = n}$$

   car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ donc $\chi_{(A,B)}$ est scindé, de degré d.

10. On suppose que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$. Alors, avec les trois questions précédentes,

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim E_\lambda(A, B) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, C} \dim E_\lambda C.$$

   Par caractérisation, $\boxed{C = A^{-1}B \text{ est diagonalisable,}}$ et de manière symétrique à 7, $\boxed{(A, B) \text{ est diagonalisable.}}$

Fin