Concours Blanc

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Problème 1 : Fonctions Gamma et Digamma

I. Partie préliminaire

1. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$. Démontrer que la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   (b) On note alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ la **fonction Gamma d'Euler**.
   Démontrer que $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

   (c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

   (a) Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

   La limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* , appelée **constante d'Euler**.
   Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée **fonction Digamma**.

II. Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

3. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que

   $$\text{pour tout } t \in]0,n],\ f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n,+\infty[,\ f_n(t) = 0.$$

   (a) Démontrer que, pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leqslant -x$.
   En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$,

   $$0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}.$$

   (b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

   $$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x).$$

4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$.

   (a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geqslant 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

   (b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

   (c) Démontrer la **formule de Gauss** : pour tout $x \in]0,+\infty[$,

   $$\frac{n!\,n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x).$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note toujours $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.
   En remarquant que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0,+\infty[$,

   $$\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right],$$

   démontrer la **formule de Weierstrass** : pour tout $x \in]0,+\infty[$,

   $$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

6. (a) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   (b) On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

   (c) En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{-1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$.

   On rappelle que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

7. (a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Calculer, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$, puis démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\psi(n) = -\gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

   (c) On pose, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x}$.
   Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions
   - $f(1) = -\gamma$,
   - pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,
   - pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Problème 2 : Diagonalisation d'un couple de matrices

L'objectif du problème est de définir et d'étudier la notion de diagonalisabilité d'un couple de matrices (A, B) dans plusieurs situations.

Les parties I traite un cas particulier en dimension 3. La partie II aborde le cas où B est inversible et la partie III étudie un critère de diagonalisabilité.

La partie I est indépendante des deux autres parties.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H une partie de $\mathbb{K}$.
Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à cœfficients dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à cœfficients dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{D}_n(H)$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à cœfficients diagonaux dans H,
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles,

Définitions 1 *: Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

- *On note $E_\lambda(A, B)$ l'ensemble des matrices-colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = \lambda BX$.*
- *On dit que λ est **valeur propre** du couple (A, B) si $E_\lambda(A, B)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si $A - \lambda B$ n'est pas inversible.*
- *On note $\chi_{(A,B)}$ la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ et $\mathrm{Sp}(A, B)$ l'ensemble des valeurs propres du couple (A, B), c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$.*

Dans le cas particulier où $B = I_n$, on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de A.

Ainsi, $E_\lambda(A, I_n)$ et $\chi_{(A,I_n)}$ sont notés plus simplement $E_\lambda(A)$ et χ_A.

I. Diagonalisabilité dans un cas particulier

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B n'est pas inversible, que A l'est et que $C = A^{-1}B$.
2. Calculer $\chi_{(A,B)}(\lambda)$, en déduire $\mathrm{Sp}(A, B)$ et déterminer une base de $E_{1/2}(A, B)$ et sa dimension.
3. (a) Calculer $\chi_{(B,A)}(\lambda)$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(B, A) = \{0, 2\}$.
   (b) Montrer que $E_0(B, A) = E_0(C)$ et $E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B) = E_2(C)$ et déterminer une base de chacun de ces deux sous-espaces.
4. (a) Justifier que C est diagonalisable et la diagonaliser. On notera D la matrice diagonale et R la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres. On ne demande pas de préciser R^{-1}.
   (b) Exprimer B en fonction de A, R et D puis justifier qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PI_3Q$ et $B = PDQ$.

Définitions 2 *: Soit $(A, B, A', B') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$.*

- *On dit que le couple (A, B) est **régulier** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$.*
- *On dit que le couple (A, B) est **équivalent** au couple (A', B') et on note $(A, B) \sim (A', B')$ si*
$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A = PA'Q \quad \text{et} \quad B = PB'Q.$$
- *On dit que le couple (A, B) est **diagonalisable** si $\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \exists D' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad (A, B) \sim (D, D')$.*

II. Régularité et diagonalisabilité

5. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.
   (a) On suppose dans cette question que B est inversible. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, exprimer $\chi_{(A,B)}(\lambda)$ en fonction de $\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$ et en déduire que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.
   (b) Montrer que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.
6. On suppose dans cette question que (A, B) est régulier.
   (a) Déterminer, pour $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, une relation entre $\chi_{(A,B)}(\lambda)$ et $\chi_{(B,A)}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ et en déduire que (B, A) est régulier.
   (b) On suppose dans cette question que r et s sont deux entiers tels que $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$ et $a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a_r \neq 0$ et $a_s \neq 0$. On suppose également que $\chi_{(B,A)}$ s'écrit sous la forme $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum\limits_{k=r}^{s} a_k \lambda^k$.
   Montrer que 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ d'ordre de multiplicité r et que $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n - r$.
   (c) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) B est inversible (ii) $\chi_{(A,B)}$ est de degré n (iii) $0 \notin \mathrm{Sp}(B, A)$
7. On suppose dans cette question que B est inversible. Montrer que si $B^{-1}A$ est diagonalisable, alors (A, B) est diagonalisable.

Définitions 3 *: Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ un couple régulier.*

- *Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A, B)$, on note $m_\lambda(A, B)$ l'**ordre de multiplicité** de λ en tant que racine de $\chi_{(A,B)}$.*
- ***Si** B **est inversible**, on note $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \mathrm{Sp}(A, B), m_\infty(A, B) = 0$ et $E_\infty(A, B) = \{0\}$.*
- ***Si** B **n'est pas inversible**, on note $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \mathrm{Sp}(A, B) \cup \{\infty\}, m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de $\chi_{(B,A)}$ et $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$.*

On cherche un critère de diagonalisabilité de (A, B) faisant intervenir $\dim(E_\lambda(A, B))$.

On dit que (A, B) vérifie **la propriété** $\mathcal{H}$ si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A, B), \dim(E_\lambda(A, B)) = m_\lambda(A, B)$.

III. Un critère de diagonalisabilité

Dans toute cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ un couple régulier. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda_0 B$ soit inversible.

Dans toute la suite de cette partie, **on suppose pour simplifier les notations que** $\lambda_0 = 0$ si bien que A **est inversible**.

On note d **le degré** de $\chi_{(A,B)}$ et $C = A^{-1}B$.

Dans les questions suivantes, on pourra être amené à distinguer le cas où B est inversible du cas où B n'est pas inversible.

8. (a) Montrer que $E_0(C) = E_0(B, A) = E_\infty(A, B)$ et que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$.
   (b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des éléments distincts de $\mathbb{C}$. Justifier que si $\mathrm{Sp}(C) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, alors $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \left\{\dfrac{1}{\lambda_1}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_k}\right\}$ où on a posé $\dfrac{1}{0} = \infty$.
9. Vérifier que $m_\infty(A, B) = n - d$, puis que $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = n$.
10. On suppose que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$. Montrer que C est diagonalisable puis que le couple (A, B) est diagonalisable.

FIN DE L'ÉNONCÉ