Programme de colle – MP 1

1. Topologie

Reprise du programme sur les evn pour exercices, auquel s'ajoute

Contenus	Capacités & commentaires
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Caractérisation séquentielle des fermés de A.

2. Réduction

Révision de la première partie du chapitre, à laquelle s'ajoute

Contenus	Capacités & commentaires
Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Théorème de Cayley-Hamilton.	Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$. Démonstration non exigible.
Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\mathrm{Ker}\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_i(u)).$$	
Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u	Traduction matricielle.

La notion de polynôme minimal sera au programme de colle la semaine prochaine.

Semaine prochaine : Réduction, continuité, compacité, connexité par arcs.

Questions de cours :

(i) Toutes les définitions concernant la topologie.

(ii) Stabilité par réunion et intersection de voisinages, ouverts, fermés, avec contre-exemples.

(iii) L'adhérence est le plus petit fermé contenant la partie.

(iv) L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.

(v) Caractérisations séquentielles des fermés et fermés relatifs.

(vi) Lemme de décomposition des noyaux (pour un produit de deux polynômes).

(vii) u est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé simple.

(viii) **CCINP 34** : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
  - (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
  - (b) Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $x_n \to x$.
  - (c) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - (d) Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

(ix) **CCINP 37** : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
  - (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
    ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
    iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
  - (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(x) **CCINP 38** : On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On pose $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
  - (a) i. Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
    Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
    ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
    iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
  - (b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
    Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

(xi) **CCINP 41** : Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :
  - (a) On utilisera au moins une fois des suites.
  - (b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
  - (c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

(xii) **CCINP 44** : Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

(a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

ii. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

(c) i. Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ii. Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

(xiii) **CCINP 45** : **Les questions a. et b. sont indépendantes**.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

(a) i. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

ii. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

(b) On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

i. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.

ii. On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx+(1-t)y) \leqslant td_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

(xiv) **CCINP 65** : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

(b) i. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

ii. Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

(xv) **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$.

(b) i. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.

ii. En déduire que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

(c) On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions a. , b. et c. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.