Programme de colle – MP 1

Probabilités

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie, via la formule $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.	
b) Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$.	
Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.	Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.

Pas de variable aléatoire pour le moment.

Espaces vectoriels normés

Extrait du programme officiel.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.

Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Normes $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$, $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.

Semaine prochaine : Topologie, réduction des endomorphismes (polynômes annulateurs).

Questions de cours :

(i) Définitions d'une tribu, d'une probabilité, d'un système complet d'événements, d'un événement négligeable, d'un événement presque sûr, d'une probabilité conditionnelle, de l'indépendance mutuelle.

(ii) Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

(iii) Énoncé et démonstration des formules de probabilités composées, totales, Bayes.

(iv) Si des événements sont mutuellement indépendants, on peut passer certains événements au complémentaires en conservant l'indépendance. Démonstration pour le passage d'un événement au complémentaire.

(v) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

(vi) Norme N_∞ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(vii) Comparaisons (les 6) des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

(viii) Comparaisons des normes usuelles sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

(ix) Toute démonstration de résultat concernant les suites vectorielles du programme.

(x) **CCINP 37** : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

(a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.

iii. (5/2) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

(b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(xi) **CCINP 38** : On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

(a) i. Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

ii. (5/2) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k.
On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

(xii) **CCINP 101** : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

(a) i. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   ii. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   i. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   ii. Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   iii. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

(c) Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

(xiii) **CCINP 105** :

(a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

(b) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   i. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   iii. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

(xiv) **CCINP 107** : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

(a) Calculer p_1.

(b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

(xv) **CCINP 112** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

(a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

(b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

(c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Programme de MPSI

Extrait du programme officiel :

A. Probabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Expérience aléatoire et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où cet univers est fini.
b) Espaces probabilisés finis	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Probabilité uniforme. Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste. L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.
Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.	
Formules de Bayes : 1. si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $P(A \mid B) = \dfrac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$ 2. si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors $P(A_j \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.
d) Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants. Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$. L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \ldots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.