Programme de colle – MP 1

Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière.	Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.
La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $\|z\| > R$. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Utilisation de la règle de d'Alembert.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Série entière d'une variable réelle	
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.
c) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \|z\| < 1\}$. Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r, r[$.	
Développements de fonctions de variable réelle.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Dénombrement (révisions de MPSI)

Tout exercice de dénombrement, pouvant être issu de situation probabiliste (probabilité uniforme sur des univers finis, programme de MPSI), mais rien de plus concernant les probabilités cette semaine.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.	
Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Semaine prochaine : Probabilités

Questions de cours :

(i) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Effet des comparaisons asymptotiques ($\leqslant$, o, O, $\sim$) sur le rayon de convergence.

(ii) Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence.

(iii) Somme de deux séries entières.

(iv) Produit de Cauchy de deux séries entières.
Exemple le produit a un rayon de convergence strictement plus grand que le minimum des rayons de convergence des deux séries entières, pourtant différents.

(v) Classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et expression des dérivées.

(vi) Liste des développements en série entière des fonctions usuelles au programme.

(vii) Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle.

(viii) **CCINP 2** : On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

(a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

(b) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

(c) i. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

ii. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

(ix) **CCINP 14** :

(a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

(c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

(x) **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

(b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

(c) La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

(xi) **CCINP 18** : On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

(a) Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

(xii) **CCINP 20** :

(a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

(b) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

i. $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$. ii. $\sum n^{(-1)^n} z^n$. iii. $\sum \cos(n) z^n$.

(xiii) **CCINP 21** :

(a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

(b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.

(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

(xiv) **CCINP 22** :

(a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

(b) Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

(xv) **CCINP 23** : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

(a) Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
On le note R.

(b) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

(xvi) **CCINP 24** :

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

(c) i. Déterminer $S(x)$.
ii. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1,\ \ f(x) = \text{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0,\ \ f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0\,.$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(xvii) **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

(a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.

(b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

(xviii) **CCINP 47** : Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

(b) $\sum a_n x^n$ avec $\left\{ \begin{array}{l} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{array} \right.$

(xix) **CCINP 51** :

(a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

(b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

(c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

(d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

(xx) **CCINP 112** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

(a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

(b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

(c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.